Ministerio de Educación Pública
Dirección de Desarrollo Curricular
Departamento de Primero y Segundo Ciclos
Asesoría Nacional de Matemática

6 CUADERNILLO DE APOYO PARA EL DOCENTE

Olimpiada Costarricense de Matemática para Educación Primaria OLCOMEP- 2020

SEXTO AÑO

Olimpiada Nacional de Matemática en Primaria

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

PRESENTACIÓN

Es fundamental que nuestro sistema educativo fomente en la sociedad costarricense, todas las actividades posibles orientadas a estimular el desarrollo científico y tecnológico, a efecto de formar personas con las habilidades necesarias para hacer frente a los retos y demandas contemporáneas.

La enseñanza de la matemática ocupa un papel clave en el currículo escolar y persigue el desarrollo de un proceso intelectual en los estudiantes. La Olimpiada Costarricense de Matemática para Educación Primaria OLCOMEP, tiene como finalidad estimular y desarrollar entre los niños y niñas sus capacidades de resolución de problemas matemáticos, por medio de una competencia de conocimiento sana entre estudiantes de diferentes regiones educativas del país.

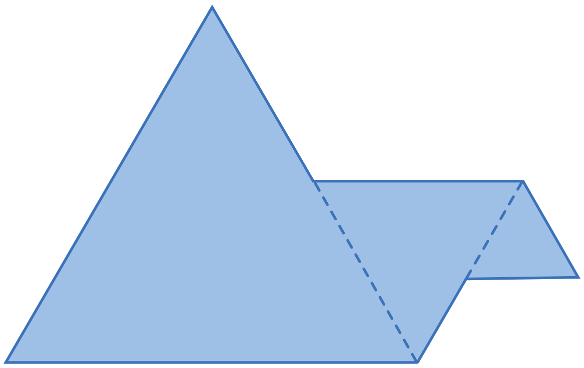
El presente cuadernillo pretende ser un insumo de apoyo para el docente y práctica para el estudiante. El mismo busca orientar a los y las participantes de la OLCOMEP, por medio de la presentación de problemas recopilados de las pruebas aplicadas en ediciones anteriores de la misma olimpiada. Su contenido pretende dar pautas sobre los tipos de problemas a los que se van a enfrentar los y las estudiantes en las diferentes etapas que comprende la OLCOMEP, así como sus diferentes estrategias de resolución.

Los problemas aquí seleccionados se fundamentan en situaciones matemáticas donde se requiera manifestar las habilidades que caractericen el talento matemático para lograr su resolución, basados en los niveles de complejidad de los problemas descritos en el Programa de Estudio en Matemáticas (MEP, 2012) y por medio de los diferentes contextos que se consideran para la olimpiada.

Comisión Central de OLCOMEP

PROBLEMAS DE PRÁCTICA

1. La siguiente figura compuesta está formada por tres triángulos equiláteros de diferentes tamaños.



Recuerde que un triángulo equilátero es un polígono regular de tres lados de igual medida

Además este triángulo es equiángulo, es decir, los tres ángulos internos miden lo mismo (60°).

El triángulo equilátero tiene 3 ejes de simetría, cada uno pasa por un vértice y el punto medio del lado opuesto.

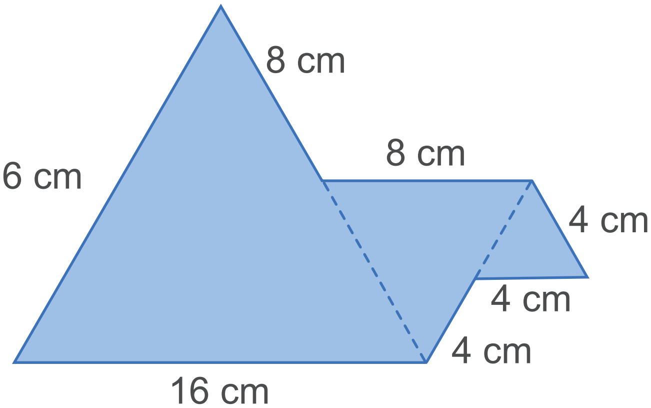
En dicha figura, el perímetro del triángulo mediano es el doble del pequeño y el perímetro del mediano es la mitad del grande. Si el perímetro del triángulo grande es de 48 cm, entonces ¿cuál es el perímetro, en centímetros, de la figura compuesta?

Siguiendo la relación entre triángulos, vemos que el **perímetro del triángulo grande es dos veces el del mediano**, y este, a su vez, el doble del pequeño. Como el perímetro mayor es 48 cm, y los triángulos son equiláteros se podría establecer la siguiente relación:

	Triángulo grande	Triángulo mediano	Triángulo pequeño
Perímetro	48 cm	24 cm	12 cm
Lado	16 cm	8 cm	4 cm

Para averiguar la medida del lado, se han dividido los perímetros entre tres. Recuerde que, al ser triángulos equiláteros, los tres lados de cada triángulo tienen la misma medida.

Ahora se debe averiguar el perímetro de la figura compuesta, es decir, la suma de sus lados. En este caso:



P = 16 + 16 + 4 + 4 + 4 + 8 + 8

P = 60 cm

El perímetro de la figura es 60 cm.

2. Soy un número natural que se obtiene de sumar, los siguientes dos números:

- Al sumar todos los múltiplos de 3 menores que 16,
- Al sumar todos los cuadrados de los números menores que 5.

¿Qué número soy?

Primero, se debe indagar cuales son los múltiplos de tres menores que 16, es decir, aquellos números menores a 16 que pueden dividirse de forma exacta entre tres. Los siguientes son todos los números menores que 16. En rojo se marcan los múltiplos de tres:

0, 1, 2, **3**, 4, 5, **6**, 7, 8, **9**, 10, 11, **12**, 13, 14, **15**

Ahora, se deben buscar los cuadrados de los números menores a 5, es decir, el resultado de multiplicar estos números por ellos mismos, tal y como se muestra:

Número	0	1	2	3	4
Operación	0 x 0	1 x 1	2 x 2	3 x 3	4 x 4
Resultado	0	1	4	9	16

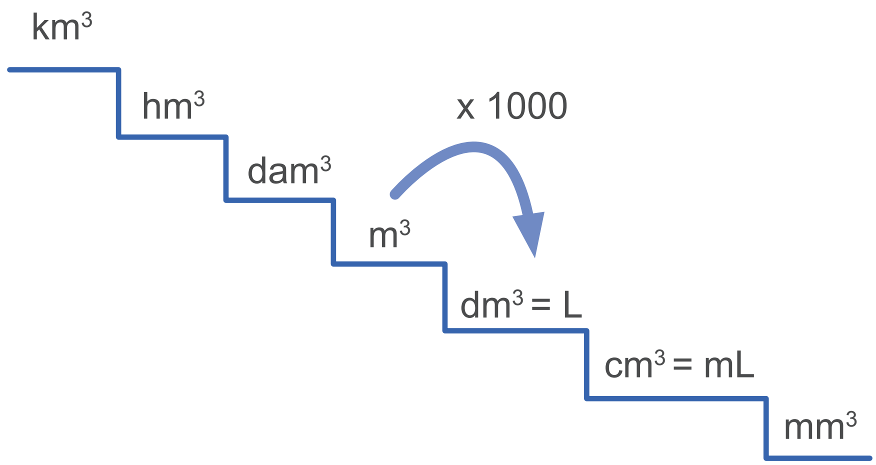
Ahora que se saben los números, se pueden sumar
0 + 3 + 6 + 9 + 12 + 15 + 0 + 1 + 4 + 9 + 16
75
El número es 75.

3. Considere la siguiente relación

Un decímetro cúbico equivale a un litro

Si se tiene un recibo de agua que indica un consumo de 18,55 m^3, entonces según ese recibo ¿cuántos kilolitros de agua se consumieron?

Con la información, no es posible hacer una conversión de metros cúbicos a litros, por lo que se debe primero convertir esta cantidad a metros cúbicos utilizando la escalera de medidas de volumen.

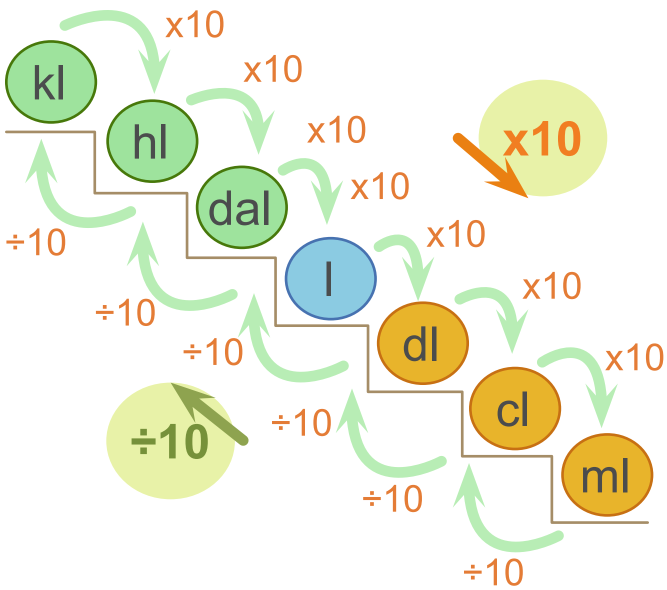


En esta, por cada salto de una unidad menor a una mayor se debe multiplicar por mil. Entre m^3 y dm^3 hay un salto, es decir, se debe multiplicar 18,55m^3 por 1000

$$18{,}55 \times 1000 = 18\,550 dm^3$$

La cantidad representa 18 550dm^3 es decir 18 550L

Ahora la respuesta es solicitada en kilolitros, por lo que es necesario realizar una nueva conversión, esta vez utilizando la escalera de unidades de capacidad.



En esta, cada salto de una unidad menor a otra mayor significa una división por 10. Como se deben dar tres saltos para pasar de litros a kilolitros, se deberá dividir entre mil.

18 550 ÷ 1000 = 18,55 Kl

De esta manera, es posible determinar que se consumieron 18,55Kl de agua.

4. Hay un número natural diferente de cero y menor que 50 que cumple:

- Divisible por 5 y por 10.
- Múltiplo de 3 y de 5 a la vez.

¿Cuál número natural cumple con las condiciones dadas?

Explorando el problema debemos identificar el conjunto al que se hace referencia, el cual son todos los números diferente de "0" y menor que 50 como se muestra:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49

Los anteriores son el conjunto al cual le aplicaremos las condiciones que se indican en el problema.

Primera condición: "Divisible por 5 y por 10."

Para encontrar el número, se pueden ir aplicando las reglas de divisibilidad y así ir descartando los números que no las cumplen. La primera es la del cinco, que establece que:

Es divisible entre 5 todo número natural que termine en 0 o 5.

De los números entre 0 y 50, se marcan en azul los que cumplen esta condición, los cuales son:

1, 2, 3, 4, **5**, 6, 7, 8, 9, **10**, 11, 12, 13, 14, **15**, 16, 17, 18, 19, **20**, 21, 22, 23, 24, **25**, 26, 27, 28, 29, **30**, 31, 32, 33, 34, **35**, 36, 37, 38, 39, **40**, 41, 42, 43, 44, **45**, 46, 47, 48, 49

A estos números se les debe volver a discriminar aplicando la regla de divisibilidad del número 10, la cual indica que:

Es divisible entre 10 los números naturales que terminen en "0"

esta regla se la aplicaremos a los siguientes números:

5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45,

Se marcan en verde los números que cumplen la condición:

5, **10,** 15, **20,** 25, **30,** 35, **40**, 45

De lo anterior, tenemos que los números que cumplen con la primera condición son el 10, 20, 30, 40.

Finalmente, la lista debe volver a reducirse al aplicar la regla de divisibilidad del número 3, la cual establece que:

Es divisible entre 3 todo número natural cuya suma de sus cifras tenga por total un múltiplo de tres (es decir un número divisible entre tres o que se encuentre en la tabla del tres).

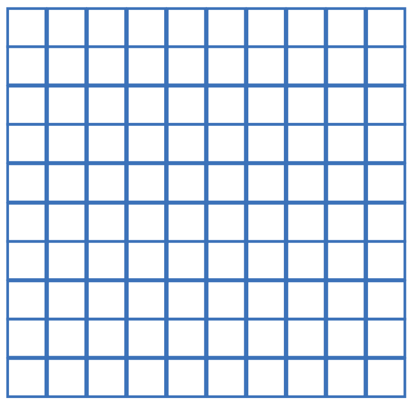
En este caso:

10	1 + 0	1
20	2 + 0	2
30	3 + 0	**3**
40	4 + 0	4

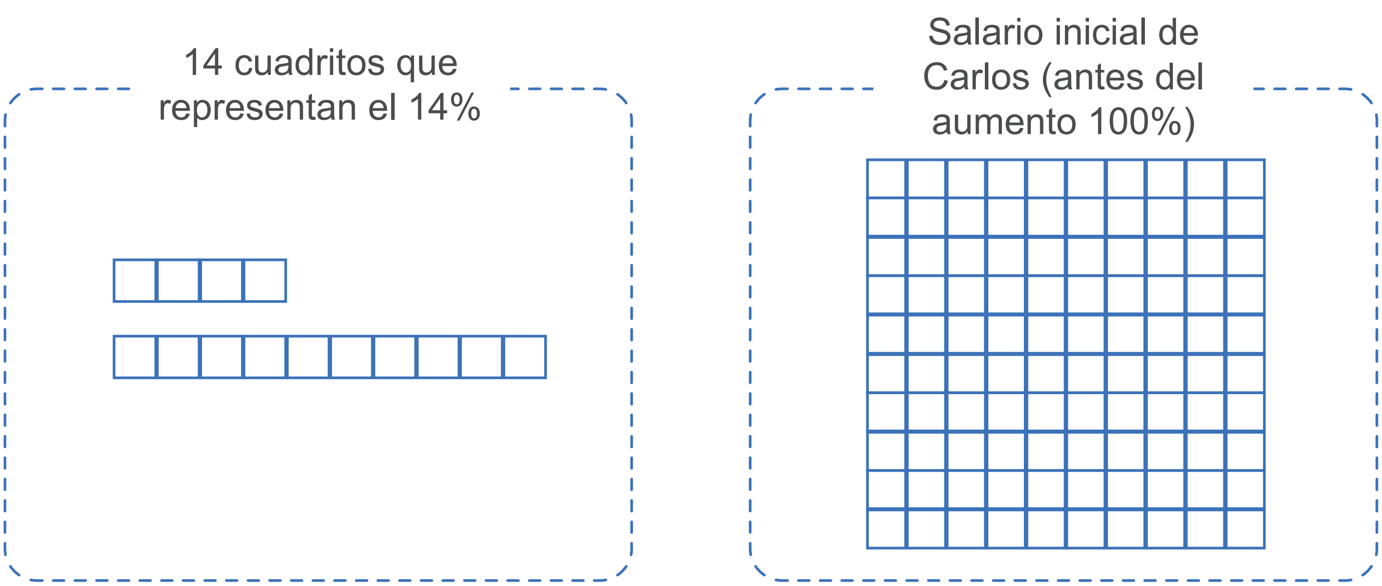
Tal y como se muestra, de los números restantes solo el 30 cumple esta condición, por lo que constituye la respuesta al problema.

5. A Carlos le aumentaron su salario un 14%, si ahora gana ₡826 500, entonces, ¿cuál era el salario de Carlos antes de recibir el aumento?

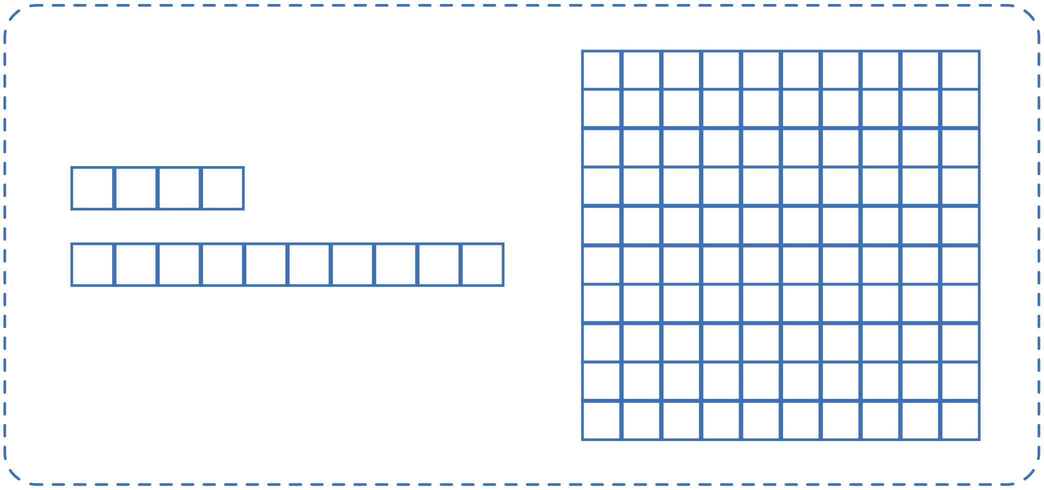
Pensemos que el salario anterior de Carlos representa un 100%, es decir un todo de 100 partes, como el de la imagen:



A esta se le ha sumado un 14%, es decir 14 cuadritos más, para tener ahora un total de 114.



Se sabe que 114 cuadritos representan ₡826 500. Para saber cuánto vale uno solo de los cuadritos, se deberá dividir ₡826 500 entre 114.



114 cuadritos representan los ₡826 500.

₡826 500 ÷ 114 =7250
= ₡ 7250

Cada $\square$ equivale a₡ 7250

Con lo anterior, como el salario inicial los representamos con 100 cuadritos entonces

100 x $\square$

100 x ₡7250

₡725 000

El salario inicial de Carlos era de ₡725 000

6. El peso de una persona en la superficie del planeta Marte es aproximadamente de un 38% de su peso en la superficie de la Tierra. Una persona que pesa en la Tierra 68 kilogramos. ¿Cuántos kilogramos pesará en Marte?

38% significa que una cantidad se divide en 100 partes, de las que se toman 38. Entonces

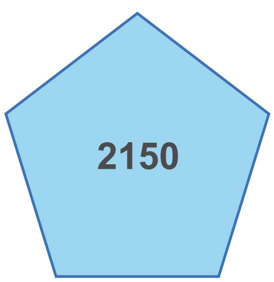
$$68 \div 100 = 0{,}68$$

$$0{,}68 \times 38 = 25{,}84$$

Por lo tanto, la masa en la tierra es de 25,84Kg.

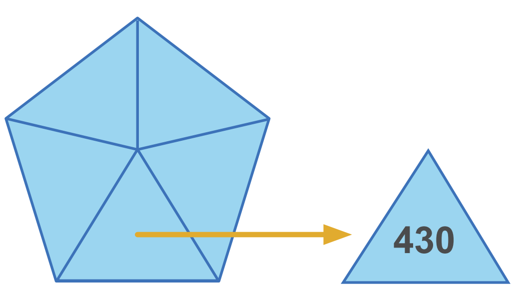
7. Armando compró una camiseta en ₡2150, después la vendió en $\frac{7}{5}$ de lo que pagó por esta. ¿De cuánto fue la ganancia que obtuvo Armando tras esta venta?

Supongamos que ₡2150 es un todo que se puede representar con la siguiente figura:



La figura representa la cantidad de ₡2150

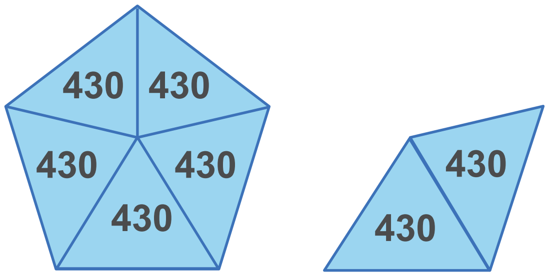
Como el precio a vender es de $\frac{7}{5}$ el precio de compra, se debe averiguar cuál es el valor de un quinto de ₡2150



Cada quinto (triángulo) tiene un valor de 430 pues:

$$2150 \div 5 = 430$$

Como el precio de venta es de $\frac{7}{5}$ se necesitan siete partes (triángulos) para conocer el precio:



El nuevo precio de venta es ₡3010, pues:

430 x 7 = 3010

Ya que el precio anterior era de ₡2150 y el nuevo de ₡3010, la ganancia será de ₡860, pues:

3010 - 215 = 860

8. Analice la siguiente expresión matemática

“El doble de la diferencia de un número y tres equivale al sucesor de ese número” se representa algebraicamente de la siguiente manera:

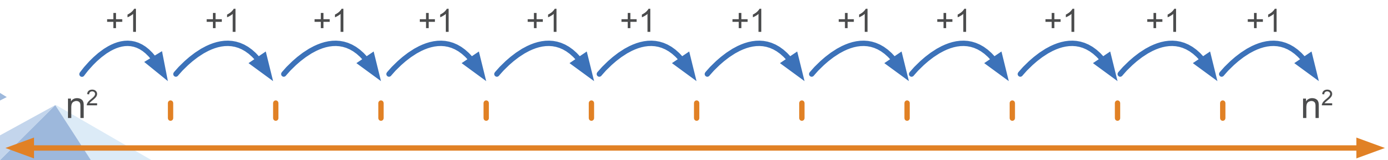
$$\mathbf{2 \times (n - 3) = n + 1}$$

Con base en este ejemplo, la representación algebraica de la expresión matemática: “El cuadrado de un número excede en doce a ese número” corresponde a:

Representemos nuestro número con la letra **n**. La expresión, el cuadrado de un número sería entonces ese número multiplicado por el mismo, o n^2

$$\mathbf{n \times n = n^2}$$

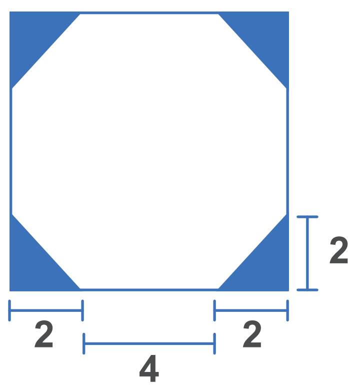
n^2 es doce unidades mayor que n. Si esto se representa en una recta numérica se vería así:



En otras palabras, se dieron 12 saltos para llegar de n a n^2. Por eso, la expresión algebraica es:

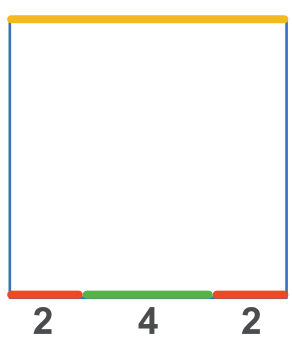
$$n^2 = n + 12$$

9. Observe la siguiente figura en la cual aparece un cuadrado que se cortaron en las esquinas cuatro triángulos rectángulos iguales:



¿Cuál es el área de la región que está en blanco?

Inicialmente, se puede averiguar el área del cuadrado, cuyo lado mide 8



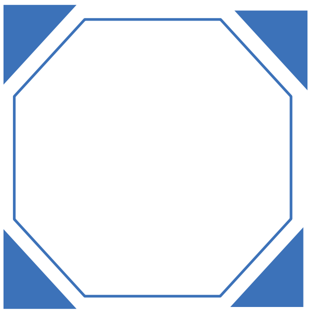
El área del cuadrado se obtiene multiplicando lado por lado

$$A = l \times l = 8 \times 8$$
$$A = 64$$

Ahora, averiguamos el área de cada triángulo en las esquinas. Estos triángulos son rectángulos, por lo que se puede averiguar su área utilizando los dos lados que forman el ángulo recto como base y altura

El área del cuadrado se obtiene multiplicando la base por la altura, y luego dividiendo este producto entre dos

$$A = \frac{(b \times h)}{2} = \frac{(2 \times 2)}{2} = \frac{4}{2}$$
$$A = 2$$



Podría decirse que al cuadrado se le han “cortado” cuatro esquinas de área $2u^2$. Entonces, al área del cuadrado se le deberían restar cuatro veces el área del triángulo para saber el área de la nueva figura:

$A = 64 - 2 - 2 - 2 - 2$

$A = 56$

El área de la figura en blanco es $56u^2$.

10. Analice la siguiente igualdad en la que a y b representan números:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Utilizando la información anterior ¿cuál es el valor de $(999,5)^2 - (998,5)^2$?

En este problema debe entenderse que, de acuerdo a la fórmula, 999,5 correspondería a la letra “**a**” de la fórmula y 998,5 a “**b**”. Entonces:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$(999,5)^2 - (998,5)^2 = (999,5 - 998,5)(999,5 + 998,5)$$

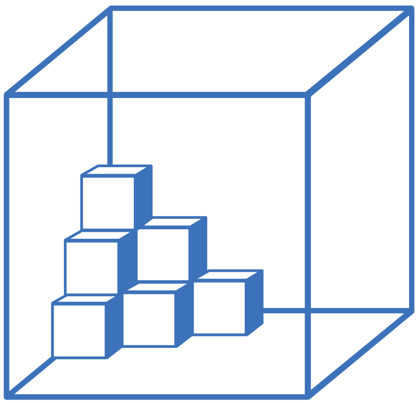
$$(1)(1998)$$

$$1 \times 1998$$

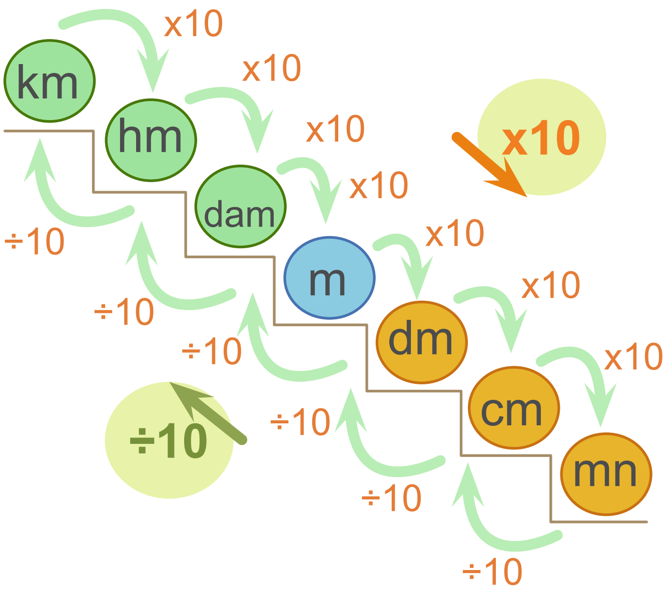
$$1998$$

El valor de la expresión es 1998.

11. Flor coloca cubitos de 1 dm de arista en una caja de medio metro de arista, como se muestra en la figura. ¿Cuál es la cantidad máxima de cubitos que podrá colocar Flor para llenar la caja?



Primeramente, podemos ver que las unidades de medida de las figuras no coinciden, pues la arista de los cubitos está dada en decímetro (dm) y la del cubo más grande en metros (m). Por tanto, se debe convertir alguna de las unidades. En este caso, convirtamos los 0,5m de arista del cubo mayor.



Recordemos que para pasar de una unidad mayor a otra menor debemos multiplicar cada salto por 10. De metros a decímetros se da un solo salto, entonces.

$$0{,}5\text{m} \times 10 = 5\text{dm}$$

Ahora, procedamos a calcular el volumen de cada figura. El volumen del cubo se calcula con la fórmula:

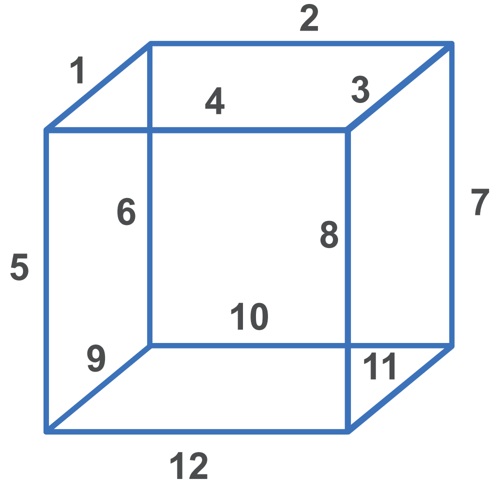
$$V = a^3$$

Cubo Mayor	Cubito
$V = a^3$	$V = a^3$
$V = a \times a \times a$	$V = a \times a \times a$
$V = 5 \times 5 \times 5$	$V = 1 \times 1 \times 1$
$V = 125\ dm^3$	$V = 1\ dm^3$

Si al cubo mayor le caben $125dm^3$ y cada cubito es de $1dm^3$, entonces serán necesarios 125 cubitos para llenar el cubo.

12. Paula y Samuel construyeron un cubo de cartón con 10 cm de arista. Si desean cubrir todas las aristas con cinta roja. ¿Cuántos centímetros de cinta roja necesitarán?

Las aristas de un cubo tienen todas la misma medida. Un cubo tiene 12 aristas, tal y como se muestra en la figura:



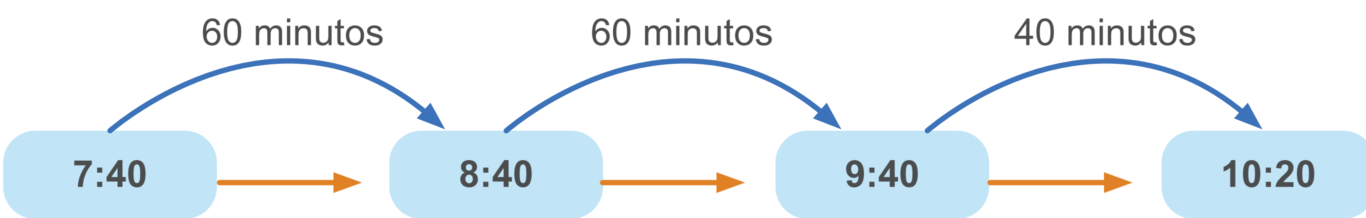
Si hay 12 aristas, y cada una tiene una longitud de 10 cm, entonces:

12 x 10 = 120 cm

Se necesitan 120 cm de cinta para el cubo.

13. Isabel está realizando una carrera de atletismo en la que mantiene su velocidad. Si inició a las 7:40 a.m. y a las 10:20 a.m. había realizado $\frac{4}{5}$ el total del recorrido, dentonces ¿a qué hora terminará Isabel la carrera?

Como Isabel se mueve a velocidad constante, ella recorre distancias iguales en tiempos iguales. Se necesita saber primero cuánto tiempo ha pasado desde las 7:40 a.m. a las 10:20 a.m.



60 + 60 + 40 = 160 minutos

Vamos a representar los 160 minutos con la siguiente línea:

Sabemos que ha tardado 160 minutos en hacer $\frac{4}{5}$ del recorrido. Esto podría ilustrarse de la siguiente manera:

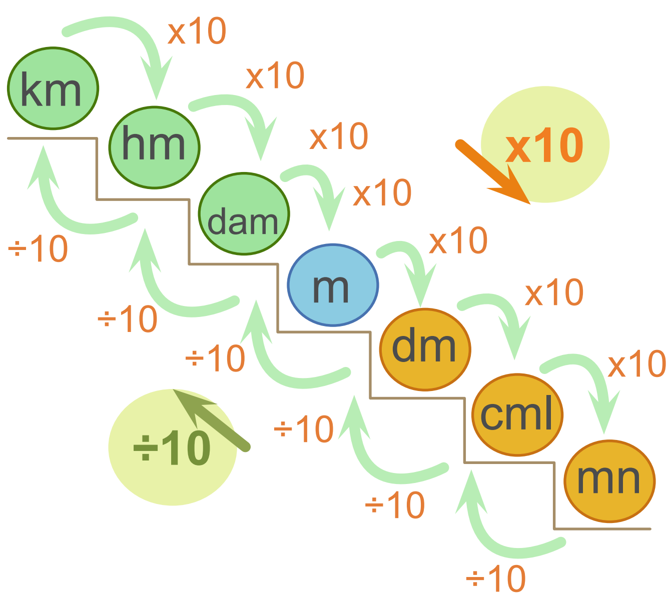
Puede verse que Isabel tarda 40 minutos en concluir cada quinto del recorrido y que, manteniendo su velocidad, tardará 40 minutos en recorrer el quinto restante.

Es decir, a las 10:20 a.m. ha recorrido ya $\frac{4}{5}$ del recorrido, será necesario sumarle 40 minutos más (el equivalente a $\frac{1}{5}$), y de esta manera determinar la hora en que finalizará.

10:20 $\xrightarrow{\text{40 minutos}}$ **11:00**

Isabel terminará la carrera a las 11:00 a.m.

14. En la casa de Andrea hay un tanque de forma cilíndrica para almacenar agua. Si la altura del tanque es de 120 cm y el área de su base es de 180 dm^2, entonces ¿cuál es el volumen, en decímetros cúbicos, de ese tanque?

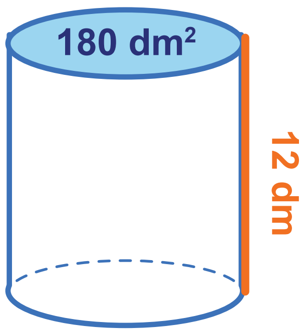


Explorando el problema se solicita que la respuesta sea en decímetros cúbico (dm^3), sin embargo, la altura está dada en centímetros (cm).De acuerdo a lo anterior es necesario realizar una conversión para llegar a la respuesta final.

Recuerde que en las medidas de longitud, para pasar de una unidad menor a una mayor se debe dividir cada "salto" entre 10. Para pasar de centímetros a decímetros se debe dar un salto, entonces:

120 ÷ 10 = 12

Las dimensiones del cilindro quedarían tal y como se muestra en la figura.



Es posible obtener el volumen del cilindro multiplicando el área **de una de sus bases** por la **altura**.

V = **Abase** x **h**
V = 180 x **12**
V = 2160 dm³

El volumen del cilindro es 2160 dm^3

15. Juan y Daniel escribieron los siguientes números: 8, 21, 17, 42 y le pidieron a Laura que añadiera un quinto número de manera que el promedio de los cinco números fuera 100 ¿Cuál fue el número que escribió Laura?

Si representamos el número de Laura con una letra **"n"** podríamos representar la relación entre los números de la siguiente manera:

$$\frac{8 + 21 + 17 + 42 + \mathbf{n}}{5} = 100$$

Lo anterior significa que necesitamos que la suma de los números, dividida entre 5, de por resultado 100. Entonces, ¿qué número dividido entre 5 da por resultado 100? Para saberlo, se puede utilizar la operación inversa de la división.

Qué número dividido entre 5 me da 100, lo contrario sería, que número multiplicado por cinco me da 100

100 x 5 = 500, entonces 500 ÷ 5 = 100

Recuerde que para calcular el promedio o media aritmética, se suman todos los datos y el resultado se divide entre el número total de datos.

La operación inversa de la división es la multiplicación y viceversa.

La operación inversa de la suma es la resta y viceversa.

Ya que sabemos que la suma debe dar como total 500, debemos preguntarnos, ¿Qué cantidad falta para que la suma de por resultado 500?

$$8 + 21 + 17 + 42 + \mathbf{n} = 500$$
$$88 + \mathbf{n} = 500$$

Los números dados por los otros niños suman 88. Entonces, ¿qué número sumado con 88 da por resultado 500? Si utilizamos la operación inversa de la suma (resta) podríamos saberlo.

$$500 - 88 = 412, \text{ entonces } 88 + 412 = 500$$

El número escrito por Laura fue 412.

16. Considere la información de la tabla referente a los resultados de una encuesta acerca de la preferencia de redes sociales y que estuvo dirigida a jóvenes entre los 12 y 15 años.

Red social preferida	Hombres	Mujeres	Total
Snapchat	60	68	128
Instagram	54	30	84
Facebook	86	82	168
TOTAL	**200**	**180**	**380**

Utilizando esta información, analice las siguientes proposiciones:

a) La cantidad de personas que eligieron Instagram es la mitad de las personas que eligieron Facebook.

b) Las mujeres tienen una mayor preferencia por Facebook con respecto a la manifestada por los hombres.

c) Hubo 40 personas más que eligieron Facebook en lugar de Snapchat.

De estas proposiciones ¿cuáles son verdaderas?

Es preciso analizar cada proposición por aparte.

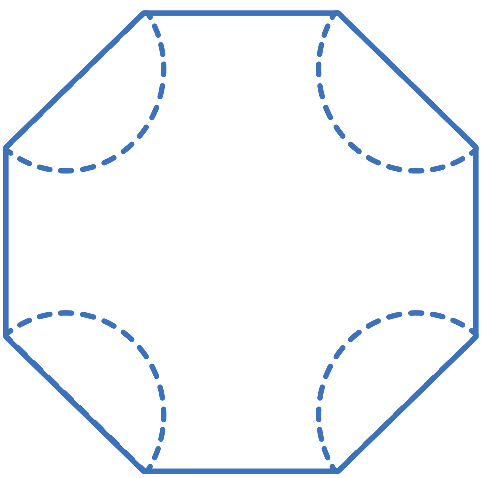
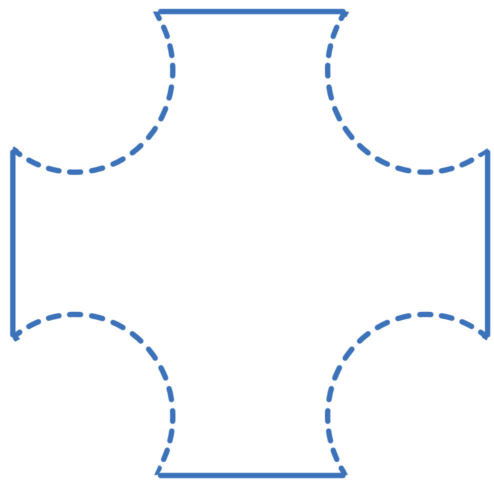
a) La cantidad de personas que eligieron Facebook es 168. La mitad de 168 es 84. 84 es el número de personas que eligieron Instagram. Por tanto, la proposición a es **verdadera**.

b) La cantidad de mujeres que eligió Facebook es 82, mientras que la de hombres que eligieron esta red social es 86. La cantidad de hombres que prefiere Facebook es mayor que la de mujeres. Por tanto, la proposición b es **falsa**.

c) 168 personas eligieron Facebook. 128 personas eligieron Snapchat. La diferencia entre 168 y 128 es de 40. Eso quiere decir que la proposición c es **verdadera**.

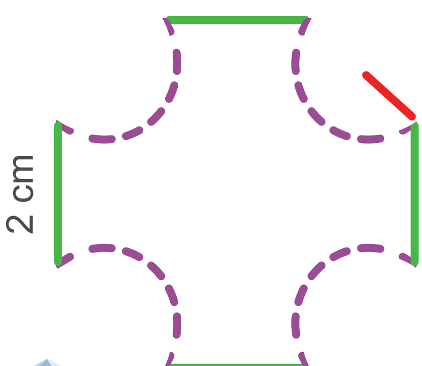
Las proposiciones a y b son verdaderas.

17. Las siguientes figuras muestran la construcción de una pieza a partir de un octágono regular cuyo lado mide 2 cm. Para construir la pieza se trazaron y recortaron 4 semicircunferencias cuyos centros son los puntos medios de algunos lados del octágono, como se muestra a continuación:

Proceso de cosntrucción	Pieza
	

¿Cuál es la longitud, en centímetros, del borde de la pieza?

Como la figura inicial era un octágono regular de lado 2 cm, sabemos que los lados resaltados en verde miden 2 cm. En rojo, se ha marcado el radio de la semicircunferencia, que mide la mitad de un lado del octágono, es decir 1 cm.



Recuerde que la longitud de una circunferencia se calcula por medio de la fórmula:

$$C = 2\pi r$$

Por lo tanto una semicircunferencia sería

$\frac{C}{2} = \frac{2\pi r}{2}$ que viene siendo $\frac{C}{2} = \pi r$

La fórmula para calcular la longitud de una semicircunferencia está dada por

$$\frac{C}{2} = \pi \times r$$

Donde **π** tendrá un valor aproximado de 3,14 y "*r*" corresponde a la medida del radio. Si aplicamos esta fórmula utilizando el radio del semicírculo, se obtendría lo siguiente.

$$\frac{C}{2} = \pi \times r$$

$$C \approx 3{,}14 \times 1$$

$$C \approx 3{,}14 \text{ cm}$$

Como la figura está compuesta por cuatro **lados rectos** y cuatro semicircunferencias el perímetro (P) se obtiene sumando todos estos lados:

$$P \approx 2 + 2 + 2 + 2 + 3{,}14 + 3{,}14 + 3{,}14 + 3{,}14$$

$$P \approx 4 \times 2 + 4 \times 3{,}14$$

$$P \approx 8 + 12{,}56$$

$$P \approx 20{,}56 \text{ cm}$$

El perímetro es aproximadamente 20,56 cm.

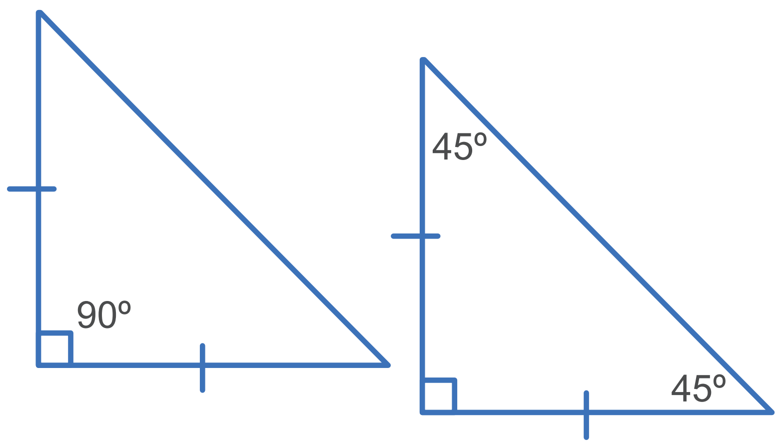
18. Elena construyó un triángulo que es, a la vez, rectángulo e isósceles. ¿Cuál es la medida de uno de los ángulos internos agudos de este triángulo?

Explorando el problema, necesitamos que el triángulo que se solicita debe cumplir el requisito de tener un ángulo de 90° y además tener dos lados de la misma medida. Aparte de esto debemos recordar dos teoremas de los triángulos:

Recordemos

1. La suma de los ángulos internos de un triángulo es 180º
2. En un triángulo, a lados de igual medida se oponen ángulos de igual medida

Con lo anterior, buscamos un triángulo que se vea similar al siguiente:



Los dos ángulos faltantes deben medir lo mismo. Ya poseemos un ángulo de 90°, por lo que los otros dos ángulos deben sumar en conjunto 90o para respetar el primer teorema explicado. Entonces:
$90° \div 2 = 45°$

La medida del ángulo que buscamos es de 45º

Recuerde que:

Triángulo rectángulo: Tiene un ángulo recto (90°)

Triángulo acutángulo: Tiene sus tres ángulos internos agudos

Triángulo obtusángulo: uno de sus ángulos internos obtuso.

Triángulo Equilátero: la medidas de sus tres lados son iguales, es decir, los tres lados son congruentes.

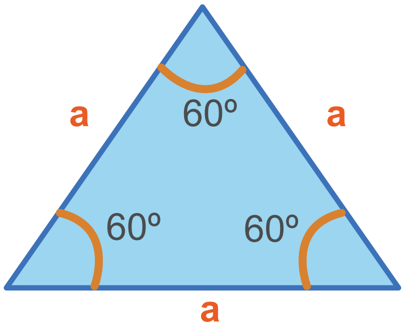
Triángulo isósceles: Las medidas de dos lados son iguales, es decir, dos lados son congruentes

Triángulo escaleno: Todas las medidas de sus lados son diferentes, es decir, no tiene lados congruentes.

19. En la figura se muestra un rectángulo y en su interior un triángulo equilátero. ¿Cuál es la medida del ángulo A?

Se sabe que **la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180º, y que en un triángulo equilátero los tres ángulos internos miden lo mismo**. Entonces, cada ángulo de un triángulo equilátero mide 60º, pues:

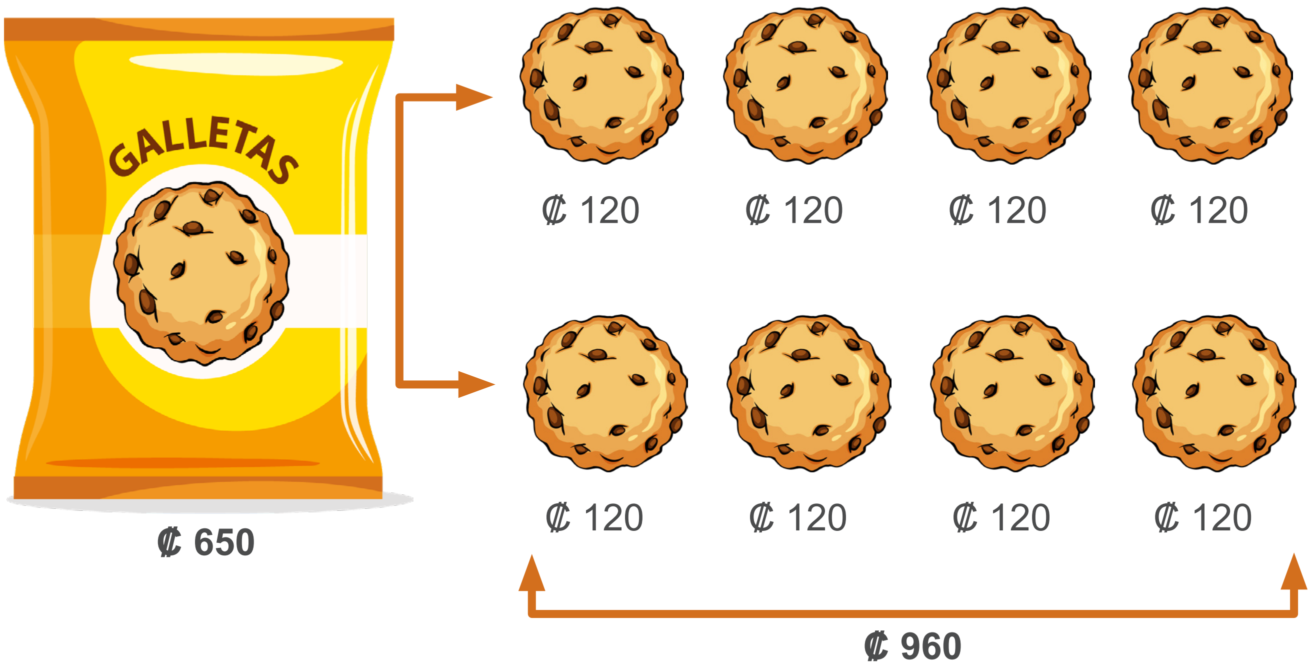
$$180 \div 3 = 60$$



Ahora, cada ángulo de un rectángulo mide 90°, entonces, el ángulo A debe medir 30º, pues es lo que le falta a 60º para completar un ángulo recto.

20. Los estudiantes del club de teatro de la Escuela La Unión necesitan reunir fondos para comprar materiales para su nueva obra. Compran en la panadería paquetes con 8 galletas en ₡650, y las venden en la escuela a ₡120 cada una. Si compran una docena de paquetes de galletas, ¿cuánta ganancia tendrán si venden todas las galletas?

La relación entre paquetes y galletas se podría ejemplificar así:



Como puede observarse, vender las 8 galletas permite recaudar ₡ 960. La ganancia vendría dada por la diferencia entre el precio de compra y el de venta, es decir

₡ 960 - ₡ 650 = ₡ 310

Como los estudiantes compraron 12 paquetes (una docena) esta ganancia se multiplicaría por doce:

₡ 310 x 12 = ₡ 3720

Si venden todas las galletas la ganancia sería de **₡ 3720**

21. Si se consideran todos los números naturales menores que 55 que al dividirlos por 5 el cociente es un número menor o igual que 9 y el residuo es cuatro, entonces ¿cuál es el mayor número que cumple con lo anterior?

Se puede realizar una tabla con los primeros 25 números naturales y tratar de obtener una relación.

Número	÷ 5	Cociente	Residuo
0	÷ 5	0	0
1	÷ 5	0	1
2	÷ 5	0	2
3	÷ 5	0	3
4	÷ 5	0	4
5	÷ 5	1	0
6	÷ 5	1	1
7	÷ 5	1	2
8	÷ 5	1	3
9	÷ 5	1	4
10	÷ 5	2	0
11	÷ 5	2	1
12	÷ 5	2	2
13	÷ 5	2	3
14	÷ 5	2	4
15	÷ 5	3	0
16	÷ 5	3	1
17	÷ 5	3	2
18	÷ 5	3	3
19	÷ 5	3	4
20	÷ 5	4	0
21	÷ 5	4	1
22	÷ 5	4	2
23	÷ 5	4	3
24	÷ 5	4	4
25	÷ 5	5	0
...	÷ 5	...	...
49	÷ 5	9	4
50	÷ 5	10	0

Como puede notarse, los números que cumplen la condición solicitada son los antecesores de los múltiplos de cinco (marcados en verde). La relación deja de cumplirse a partir de 50, pues el cociente pasa a ser siempre mayor que 9.

Por lo anterior, los números serían:

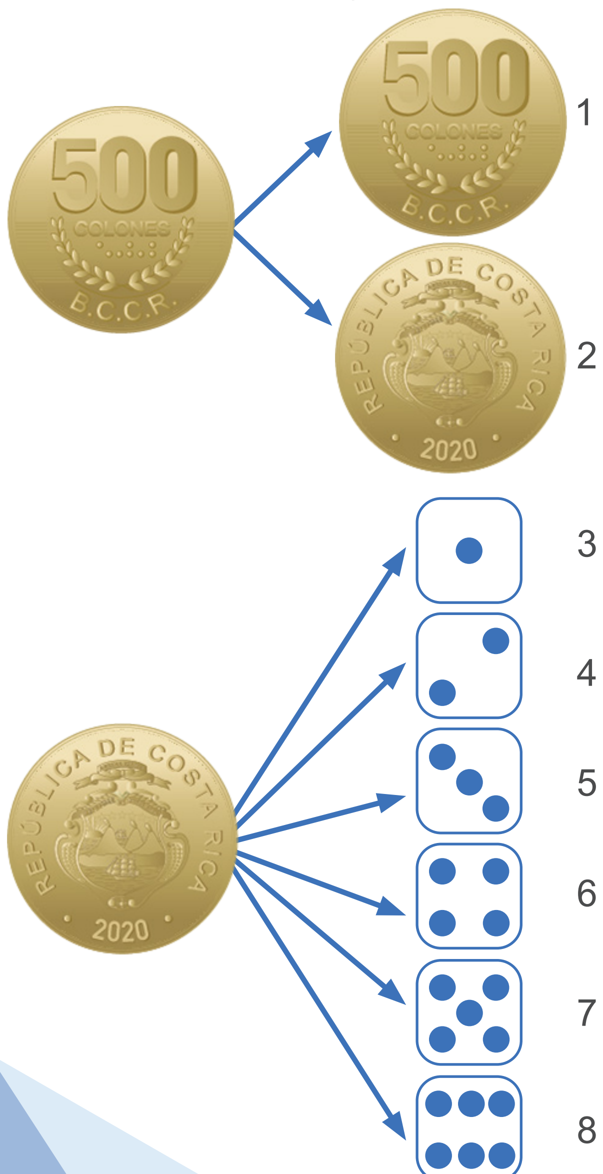
4, 9, 14, 19, 24, 29, 34, 39, 44 y 49

22. Se juega con una moneda nacional de ₡500 y un dado de forma cúbica numerado del 1 al 6. Una jugada consiste en realizar solo dos lanzamientos, según las siguientes reglas:

- Jugada 1: Si al tirar la moneda obtiene corona, entonces, tira de nuevo la moneda.
- Jugada 2: Si al tirar la moneda obtiene escudo, entonces, tira el dado.

Considerando las dos jugadas, ¿Cuál es la cantidad total, de posibles resultados, que se tiene?

Se puede realizar un diagrama de árbol para ver los posibles resultados:



Como puede observarse en el diagrama, existen 8 eventos posibles en este juego de lanzamiento

23. Se tienen 3 cajas con bolas rojas y verdes, que solo se diferencian por su color. Además, considere la información presente en la siguiente tabla:

Caja	Cantidades de bolsas
A	Hay 14 bolitas, de las cuales $\frac{2}{7}$ son de color rojo y el resto de color verde.
B	Hay 15 bolitas, de las cuales $\frac{2}{5}$ son de color verde y el resto de color rojo.
C	Hay 12 bolitas, de las cuales $\frac{3}{6}$ son rojas y el resto verdes.

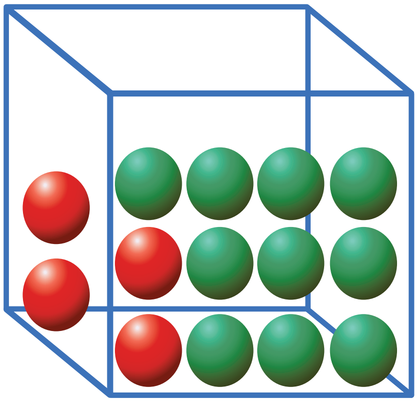
Consideremos cada uno de los casos:

Si deseo sacar de la caja, al azar, una bola roja, ¿de cuál de las tres cajas me conviene elegir para tener mayor probabilidad de acertar?

Caja A

$\frac{2}{7}$ de 14 son de color rojo (4)

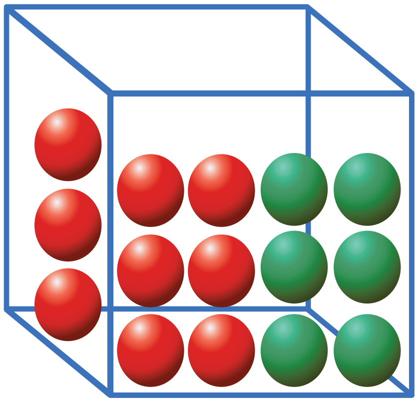
$\frac{5}{7}$ de 14 son de color verde (10)



Caja B

$\frac{2}{5}$ de 15 son de color verde (6)

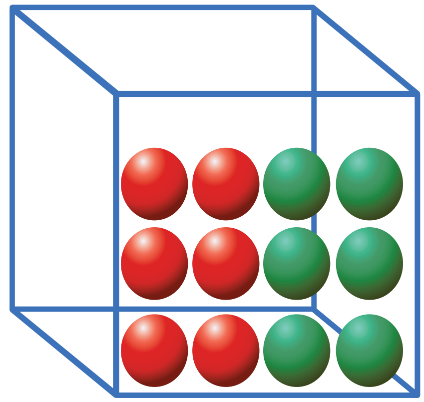
$\frac{3}{5}$ de 15 son de color rojo (9)



Caja C

$\frac{3}{6}$ de 12 son de color rojo (6)

$\frac{3}{6}$ de 12 son de color verde (6)



De acuerdo con lo anterior la caja donde hay probabilidad de sacar una bola roja sería la B.

Otra posible manera sería: Analicemos las probabilidades de obtener cada color en las cajas. Primero, veamos cuántas bolitas de cada color hay

	A (14 bolitas)	**B** (15 bolitas)	**C** (12 bolitas)
Rojo	$14 \times 2 = \frac{4}{7}$	$15 - 6 = 9$	$12 \times \frac{3}{6} = 6$
Verde	$14 - 4 = 10$	$15 \times \frac{2}{5} = 6$	$12 - 6 = 6$

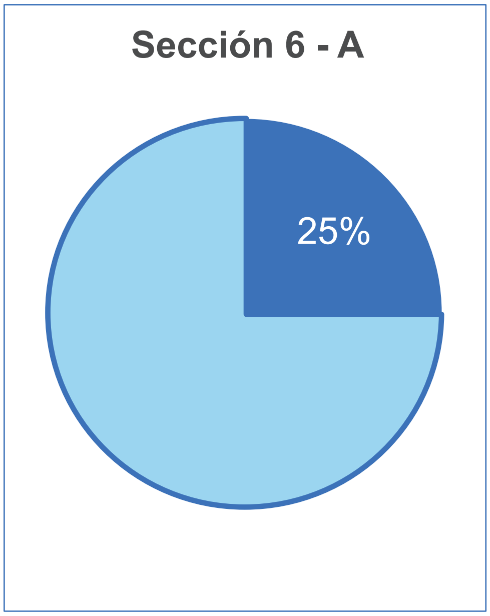
Ahora, veamos la probabilidad de obtener rojo en cada caja. Se debe recordar que la fórmula para calcular la probabilidad clásica en porcentaje es:

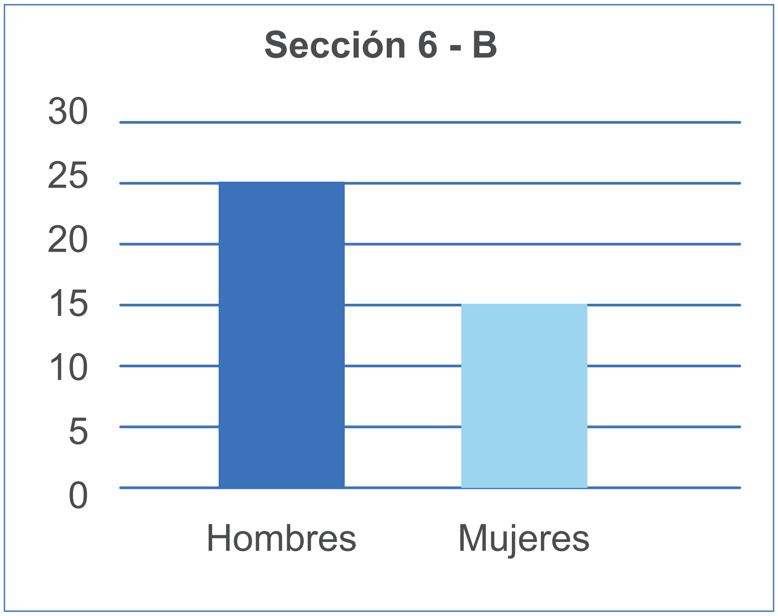
$$P = \frac{\text{Número de eventos a favor}}{\text{Total de eventos posibles}} \times 100$$

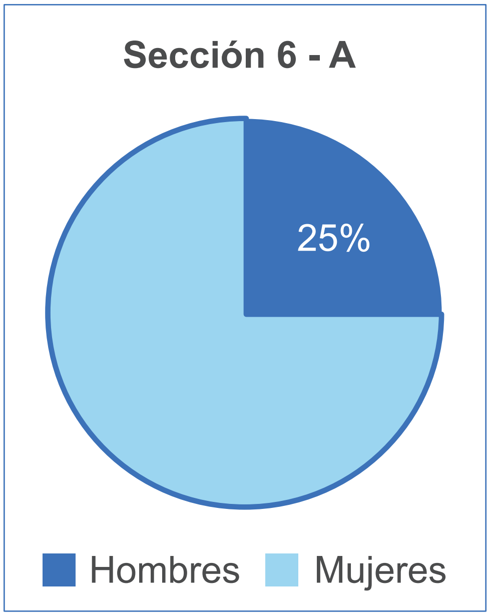
	A (14 bolitas)	**B** (15 bolitas)	**C** (12 bolitas)
Probabilidad	$\frac{4}{14} \times 100 = 29\%$	$\frac{9}{15} \times 100 = 60\%$	$\frac{6}{12} \times 100 = 50\%$

La caja con mayor probabilidad de acierto es la B.

24. Las secciones 6-A y 6-B tienen 40 estudiantes cada una. ¿Cuál es la diferencia entre las cantidades de mujeres de ambas secciones?







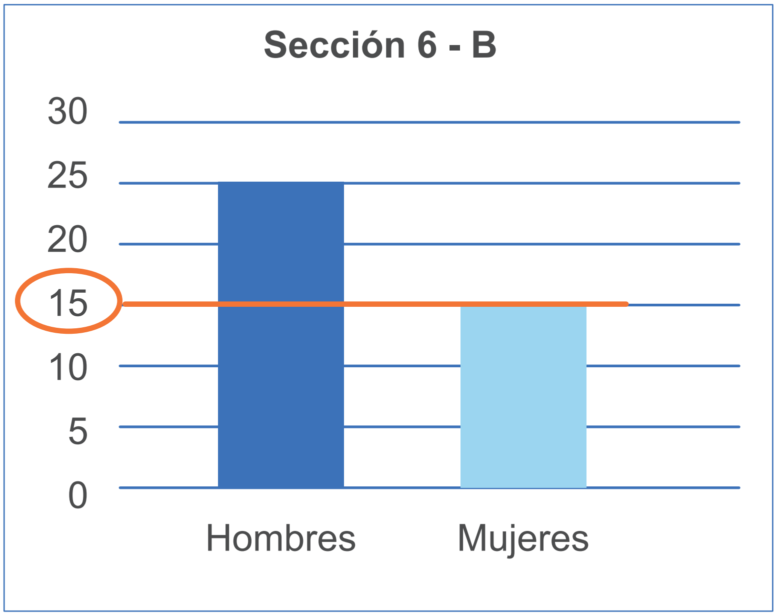
En el gráfico de pastel, podemos ver que la cantidad de hombres es el 25% de la clase, por lo que el 75% restante son mujeres. Para averiguar el 75% de 40, podemos imaginar que dividimos 40 en 100 partes y tomamos 75, es decir

$$40 \div 100 = 0{,}4$$

$$0{,}4 \times 75$$

$$30$$

En la sección 6-A hay 30 estudiantes mujeres.



Por otro lado, el gráfico de barras indica que la sección 6-B tiene 15 alumnas. Por tanto, la diferencia entre alumnas está dada por

$$30 - 15$$

$$\mathbf{15}$$

La diferencia de alumnas entre ambas secciones es 15.

25. Los niños de la sección 6-B deciden hacer una piñata para la Fiesta de la Alegría. Ellos mismos la construyen en la clase de arte y recogen dinero para rellenarla. Utilizan $\frac{1}{5}$ del dinero para comprar maní y $\frac{2}{3}$ para comprar dulces. Si con los restantes ₡ 2700 compraron el confeti, ¿cuánto dinero recogieron para rellenar la piñata?

Opción 1

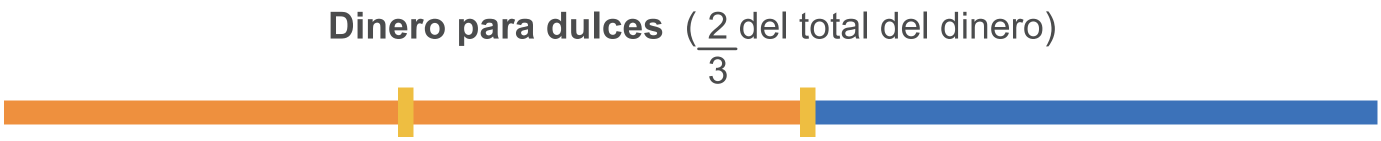
Podemos hacer uso del **<u>método lineal</u>**, considerando la siguiente representación como el total de dinero:

El total de dinero

Sobre esa cantidad el estudiante puede valorar representar el dinero utilizado para comprar maní, como se muestra:

Dinero utilizado para comprar maní ($\frac{1}{5}$ del total del dinero)

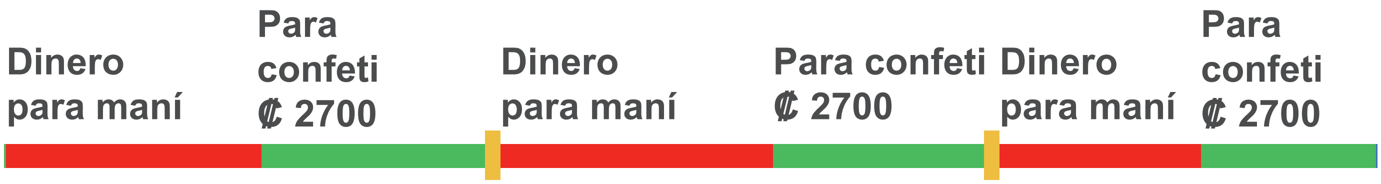
Luego determinar a cuento equivale la cantidad de dinero utilizada para dulces:



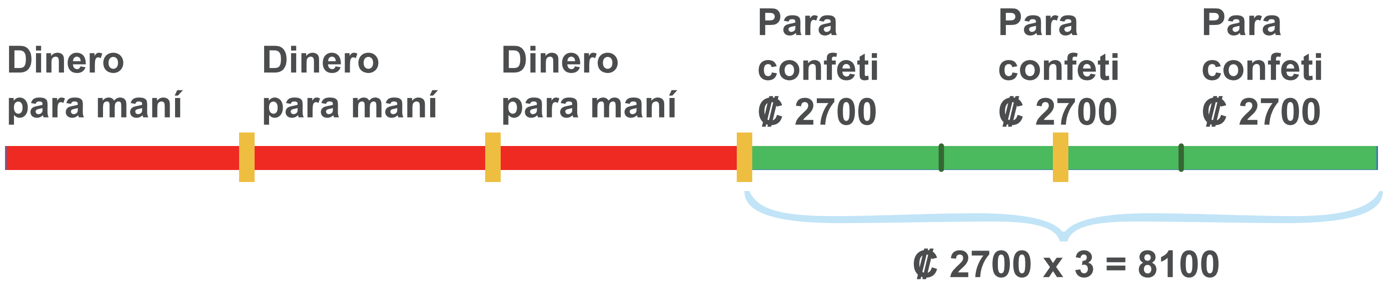
Y lo utilizado tanto para maní, dulces y lo que le quedo para confeti:

Para mayor claridad, reordenemos los datos:

Con esto el estudiante puede deducir que:



Y acomodando:



Lo que viene a equivaler a $\frac{2}{5}$ de la cantidad de dinero utilizada para comprar maní.

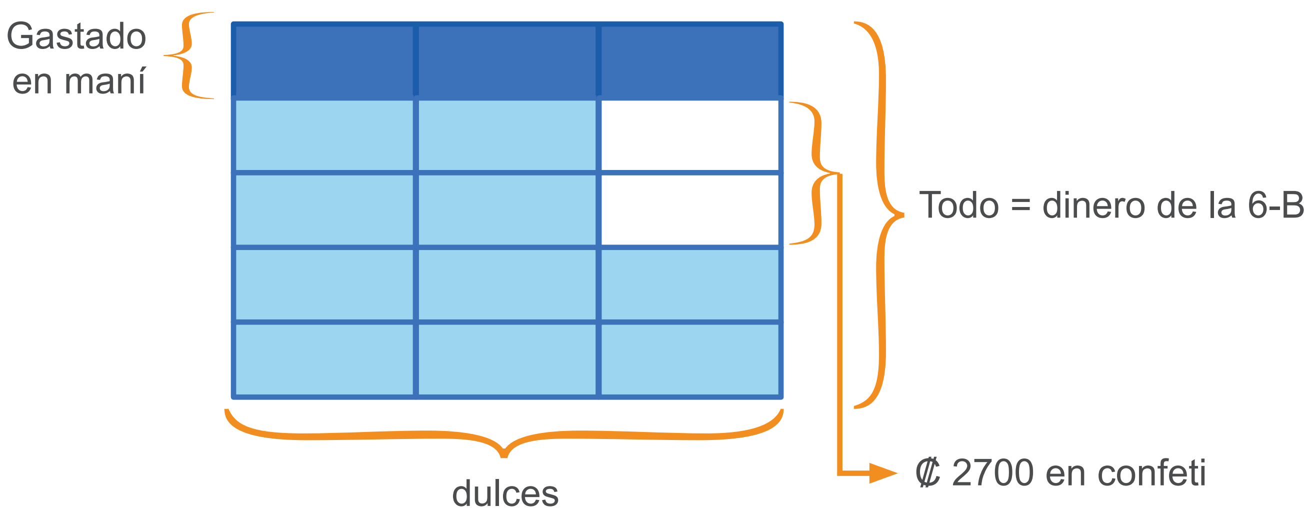
De acuerdo con lo anterior, $\frac{1}{5}$ sería equivalente a 8100 ÷ 2 = 4050

Por lo tanto el total de dinero con el que contaban los niños de la sección 6-B sería:

$$4050 \times 5 = ₡\ 20\ 250$$

Opción 2

<u>De forma gráfica modelo de Área.</u>



Se divide el total del dinero de confeti entre dos, obteniéndose que cada “rectángulo de la imagen” equivale a ₡1350.

Para determinar la cantidad total de dinero de la sección, multiplican ₡1350 por 15 (cantidad total de rectángulos), obteniendo ₡20 250.

Opción 3

- Si gastó $\frac{1}{5}$ en maní le sobran $\frac{4}{5}$
- Si gastó $\frac{2}{3}$ en dulces.

  Entonces como tenía $\frac{4}{5}$

  $$\frac{4}{5} - \frac{2}{3} = \frac{2}{15}$$

Le quedan $\frac{2}{15}$

Si 2700 es equivalente a $\frac{2}{15}$ del total del dinero.

Entonces el total del dinero corresponde a

$$\frac{2700 \times 15}{2} = 20\ 250$$

26. Ciertas bacterias producen cada hora dos nuevas bacterias idénticas, con la misma composición genética. Así, si inicialmente se tenía una bacteria, al pasar la primera hora se tendrán tres bacterias. Luego, cada una de estas tres vuelve a producir dos más, teniendo nueve bacterias idénticas al pasar la segunda hora. Al pasar la tercera hora se tendrán veintisiete bacterias.

Si la reproducción de las bacterias mantiene el mismo patrón,

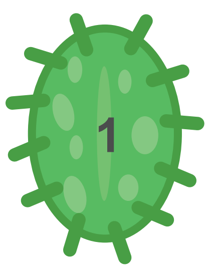
a. ¿Cuántas bacterias se tendrán al pasar la sexta hora?

b. Explique la forma de determinar el número de bacterias obtenidas después de finalizar cualquier cantidad de horas.

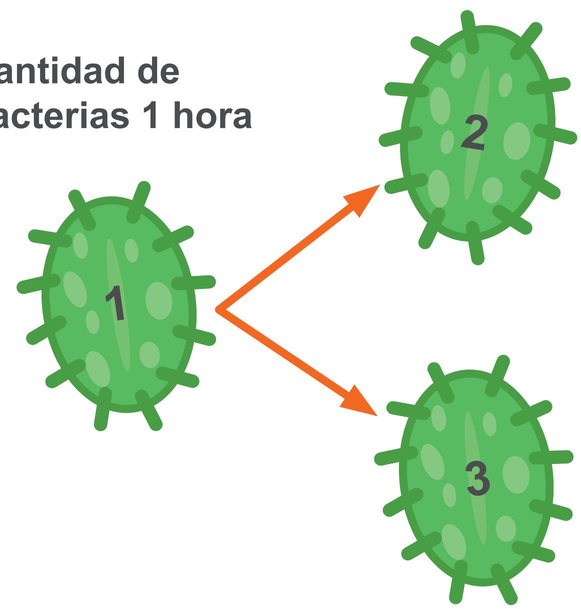
Parte a

El estudiante puede valorar la representación gráfica para determinar la cantidad de bacterias al pasar seis horas, como se muestra:

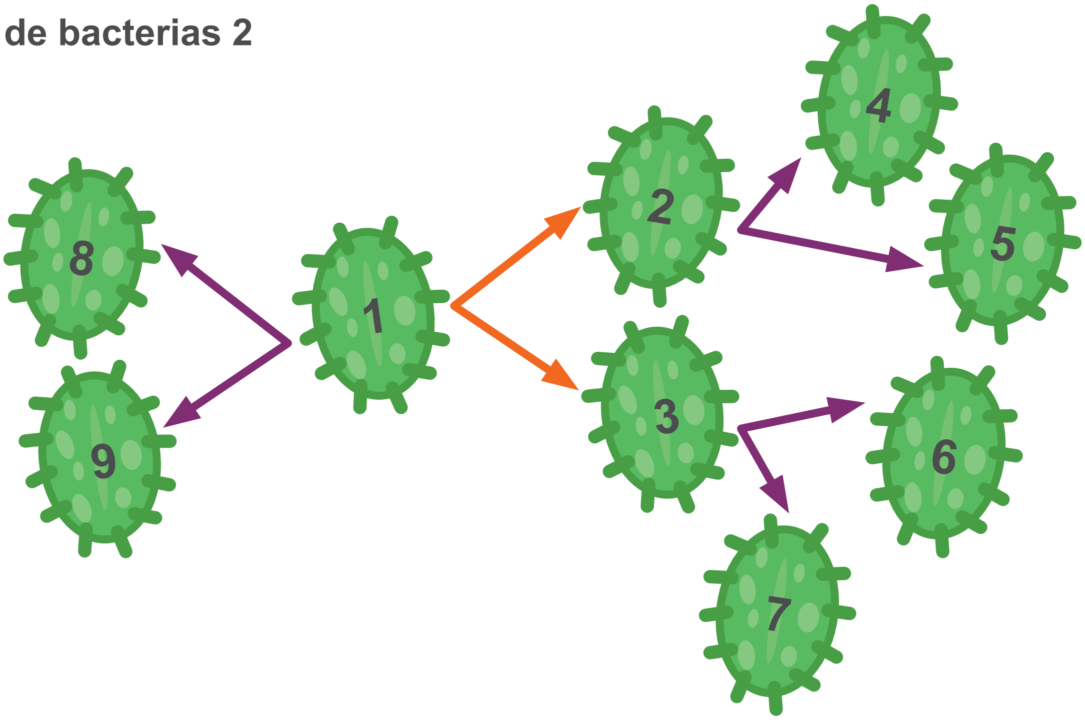
Cantidad de bacterias 0 hora



Cantidad de bacterias 1 hora

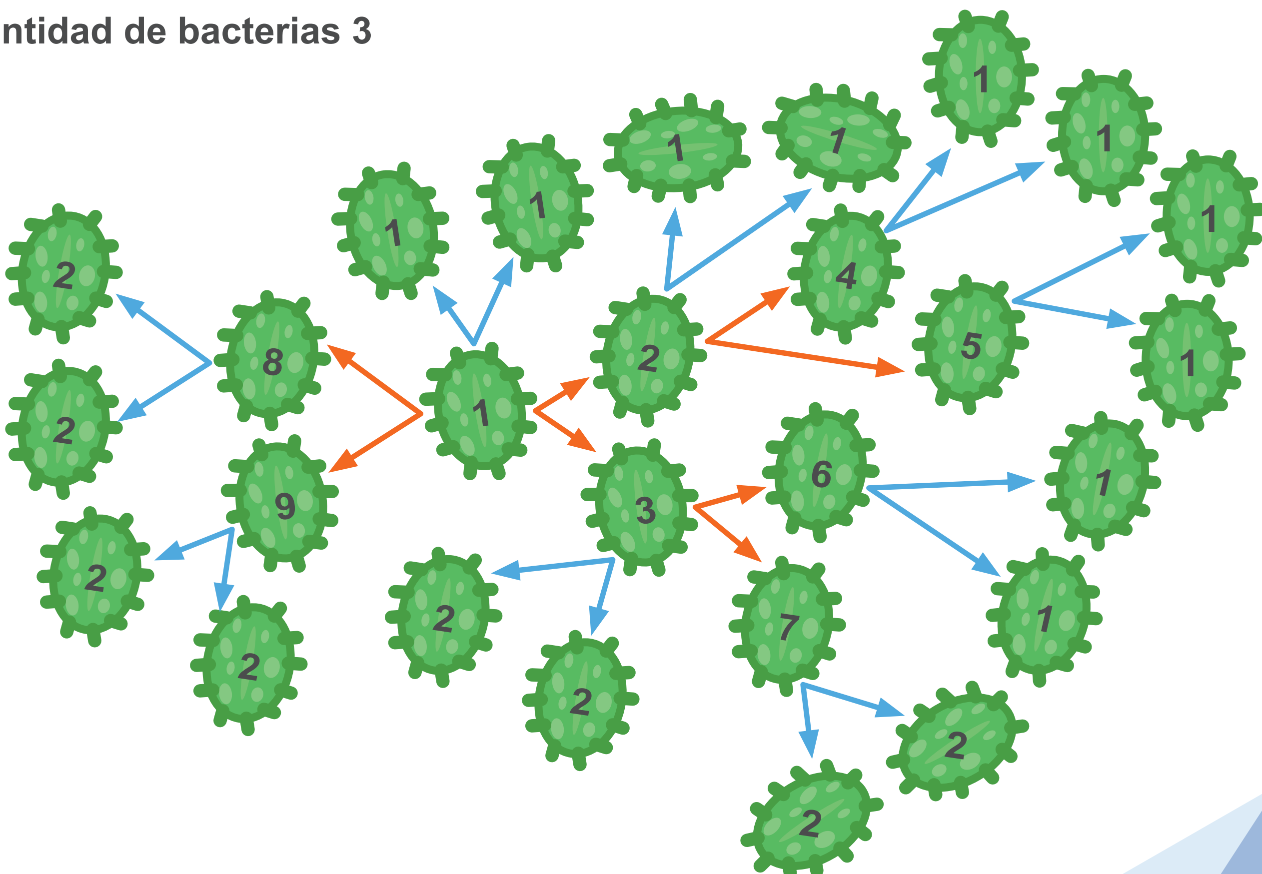


Cantidad de bacterias 2



Parte b

Cantidad de bacterias 3



Al ver la dificultad de realizar las representaciones gráficas el estudiante puede utilizar la representación tabular para sistematizar la información:

Horas	Cantidades de baterias	Relación identidicada por el nombre
0	1	3^0
1	3	3^1
2	9	3^2
3	27	3^3
4	81	3^4
5	243	3^5
6	729	3^6
.	.	.
.	.	.
.	.	.
n		

Permitiéndole realizar conclusiones a partir de estos datos para concluir que a las 6 horas tendrían 729 bacterias

Parte B

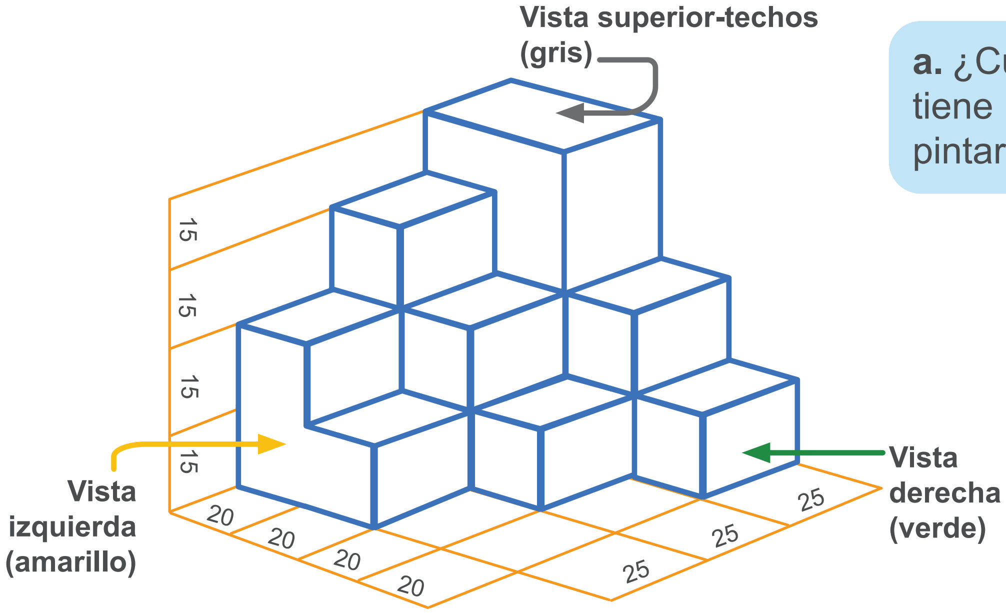
Explique la forma de determinar el número de bacterias obtenidas después de finalizar cualquier cantidad de horas.

El estudiante puede apoyarse en la representación tabular e identificar las relaciones que en ella se presentan:

Horas	Cantidades de baterias	Relación identidicada por el nombre	
0	1	3^0	
1	3	3^1	**3**
2	9	3^2	**3 x 3**
3	27	3^3	**3 x 3 x 3 x 3**
4	81	3^4	
5	243	3^5	
6	729	3^6	
.	.	.	
.	.	.	
.	.	.	
n			

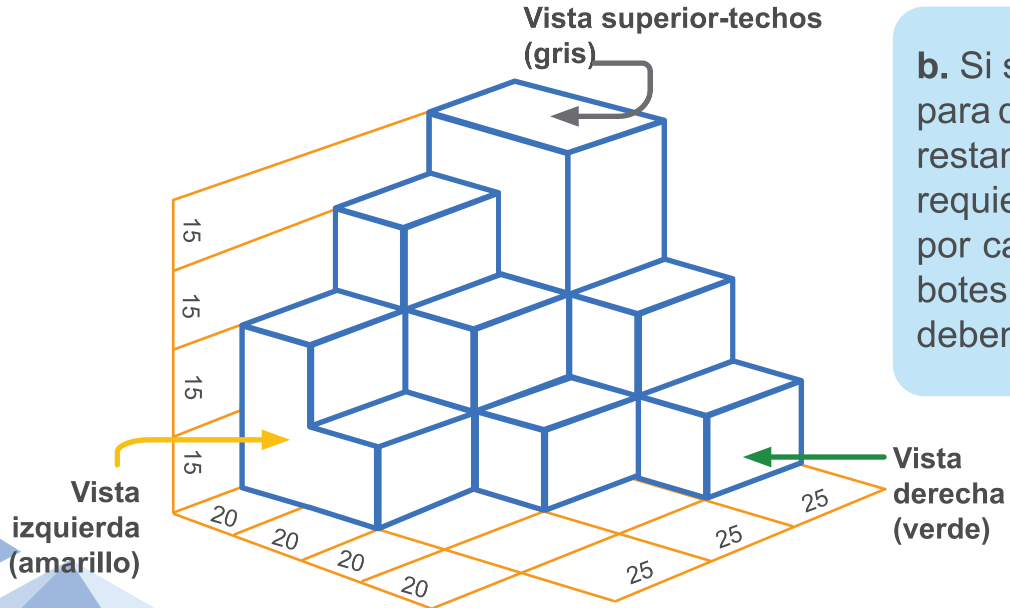
Valorando que la cantidad de bacterias corresponden a un valor constante que es 3 con el cual trabajan con potencias relacionadas con la hora en que se encuentra para determinar las bacterias que debe haber en una hora determinada

27. En el centro de la ciudad construyeron un moderno edificio, diseñado con estructuras en forma de prismas. Para decorarlo, deciden pintar tres de las vistas del edificio de colores distintos. Para ello, los pintores se distribuyen el trabajo como se muestra en el dibujo. Con base en la información conteste



Considere las medidas dadas en metros

a. ¿Cuál de los tres pintores tiene más superficie que pintar?

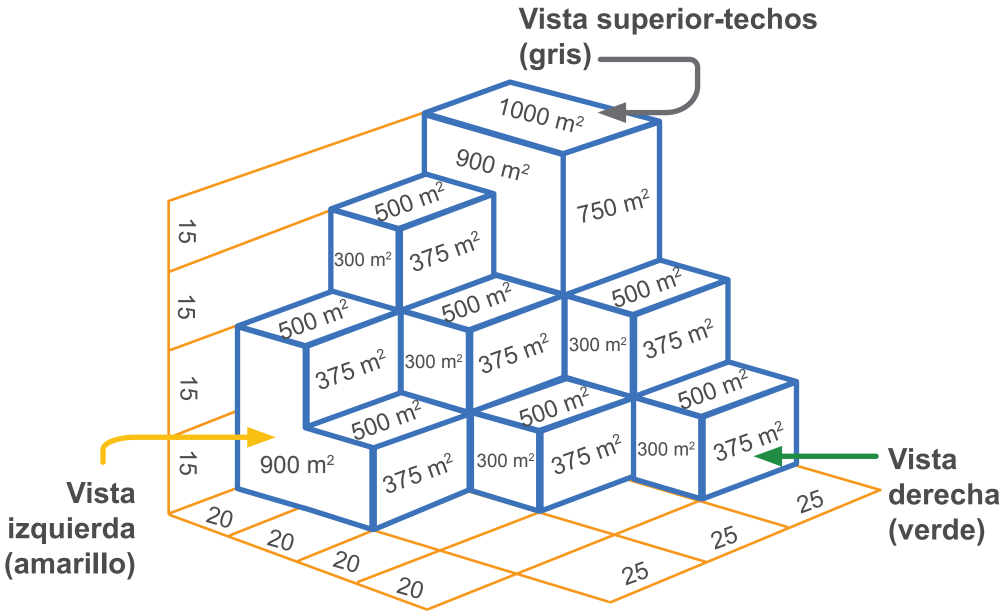


Considere las medidas dadas en metros

b. Si se contrata otro pintor, para que pinte las dos vistas restantes de color azul (se requiere un bote de pintura por cada 12 m^2), ¿cuántos botes de pintura azul se deben comprar?

Pregunta a

Sacar el área de cada figura presentada en la imagen.



Considere las medidas dadas en metros

Verde	375 x 7 + 750 = 3375 m²
Amarillo	300 x 5 + 900 x 2 = 3300 m²
Gris	500 x 7 + 1000 = 4500 m²

Opción 2

Determinar la cantidad de cuadros y las medidas.

Color	Dimensiones y cantidades
Verde	• 7 cuadros de 25 m x 15 m = 2623 m² • 1 cuadro de 25 m x 30 m = 750 m² **Total = 3375m²**
Amarillo	• 5 cuadros de 20 m x 15 m² • 2 figuras compuestas de área 900 m = 750 m² **Total = 3300m²**
Gris	• 7 cuadros de 20 m x 25 m = 3500 m² • 1 cuadro de 40 m x 25 m = 1000 m² **Total = 4500m²**

Pregunta b

Opción 1

Saber que las dos caras que no se ven miden lo mismo que las cara amarilla y la cara verde,

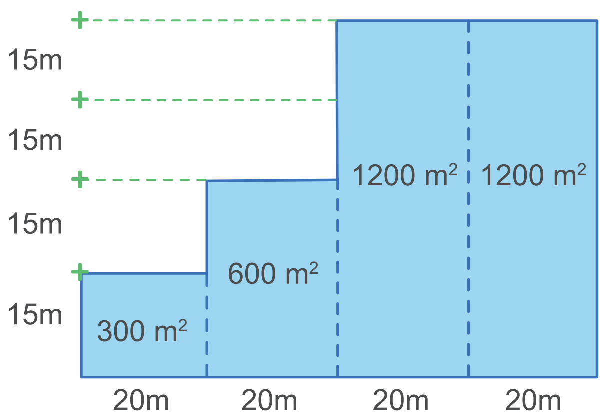
Color	Dimensiones y cantidades
Cara Verde	**3375 ÷ 12 = 281,25 por lo que se utilizan 282 botes de pintura verde**
Amarillo	**3300 ÷ 12 = 275 botes de pintura amarilla**

Por lo que nada más suma la cantidad de botes de pintura de la cara verde y la cara amarilla que serían 282 + 275 = 557.

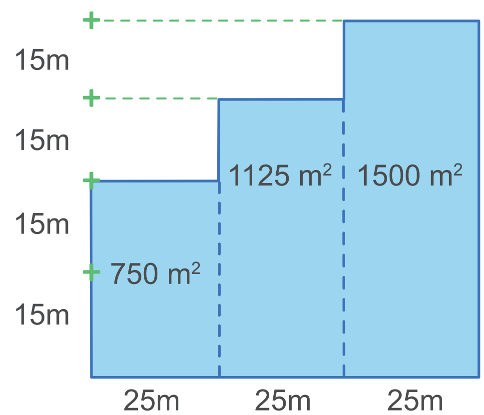
R/ 557 botes de pintura.

Opción 2

Se tienen las dos caras.



Total = 3300 m²



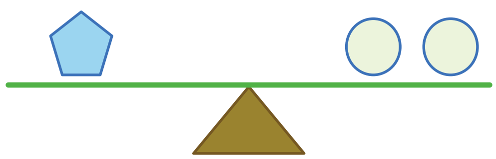
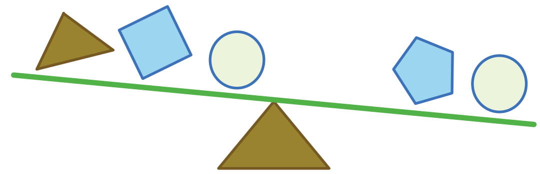
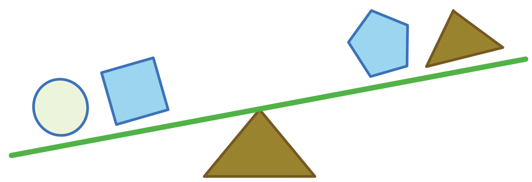
Total = 3375 m²

Por lo que se suman sus áreas $3300m^2 + 3375m^2 = 6675m^2$.

Luego está cantidad la dividimos entre $12m^2$, que es lo que cubre cada bote de pintura.

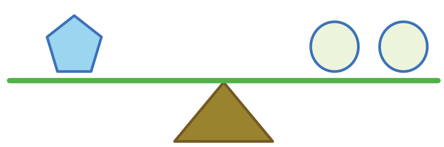
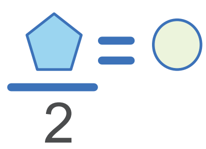
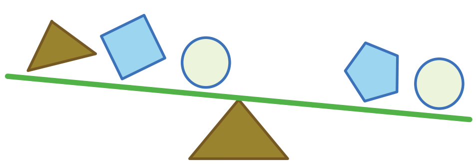
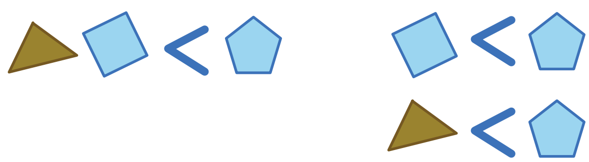
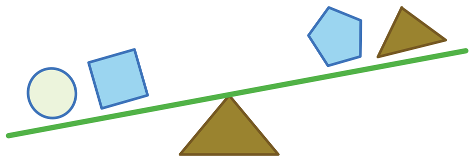
$6675m^2 \div 12m^2 = 556,25$,por lo que se ocupan 557 botes de pintura

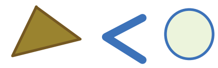
28. A continuación se le presentan tres balanzas en las que se muestran comparaciones de masas utilizando cuatro tipos de figuras. Asuma que las figuras de igual forma poseen la misma masa.

Balanza en equilibrio	**Balanzas que no están en equilibrio**
	
	

Con base en la información dada, ordene los objetos según su masa desde la figura con mayor masa hasta la figura con menor masa. Justifique su respuesta

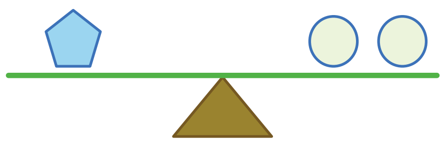
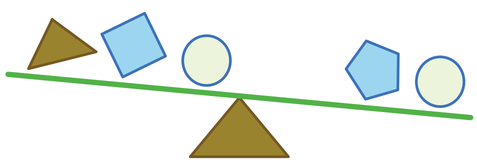
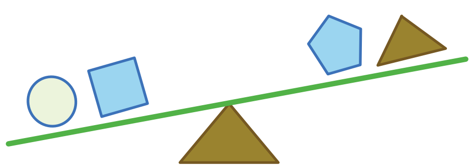
Afirmaciones

	
	
	Si el cuadrado fuera de menor área que el círculo, la balanza estaría al revés. Ya que el circulo es la mitad del área que el hexágono. 
	El triángulo tiene menor área que el circulo ya que sino la balanza estaría en sentido contrario, porque se sabe que el cuadro es menor que el hexágono.

Ordenando las figuras según su peso (desde la más pesada hacia la menos pesada) las tenemos en el siguiente orden:

Opción 2

	De la balanza en equilibrio se determina que el círculo pesa la mitad de lo que pesa un pentágono.
	De la balanza que no está en equilibrio, se determina que el cuadrado pesa menos que el pentágono, y el triángulo pesa menos que el pentágono.
	El cuadrado pesa más que el círculo. Si el cuadrado pesara menos que círculo, la balanza estaría al revés. El triángulo, es la figura que tiene menor peso, ya que si pesara más que el círculo está balanza estaría al revés.

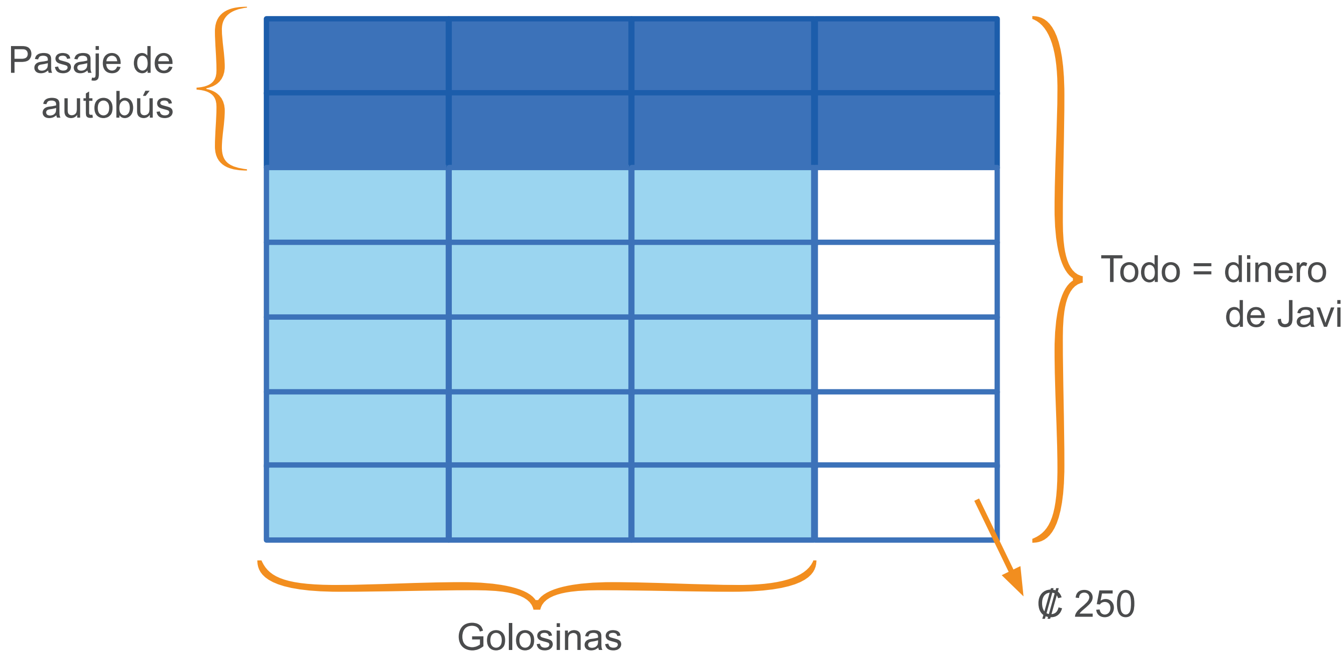
Respuesta

Ordenado de mayor a menor
Pentágono
Cuadrado
Circulo
Triángulo

29. Javier recibió dinero para el fin de semana. Dos sétimas partes de dinero lo gastó en el pasaje del autobús de ida a la tienda. Los tres cuartos del dinero restante lo gastó en golosinas. Solo le sobraron ₡250, por lo que no le alcanzó para el pasaje del autobús y tuvo que volver caminando. ¿Cuánto dinero cuesta el pasaje del autobús? Justifique su respuesta.

Opción 1

<u>De forma gráfica modelo de Área.</u>



El pasaje del bus es de ocho cuadritos, por lo que cuesta ₡400 colones.

Opción 2

Si gastó $\frac{3}{4}$ en golosinas y le sobran ₡250.

Entonces $\frac{1}{4}$ son ₡250

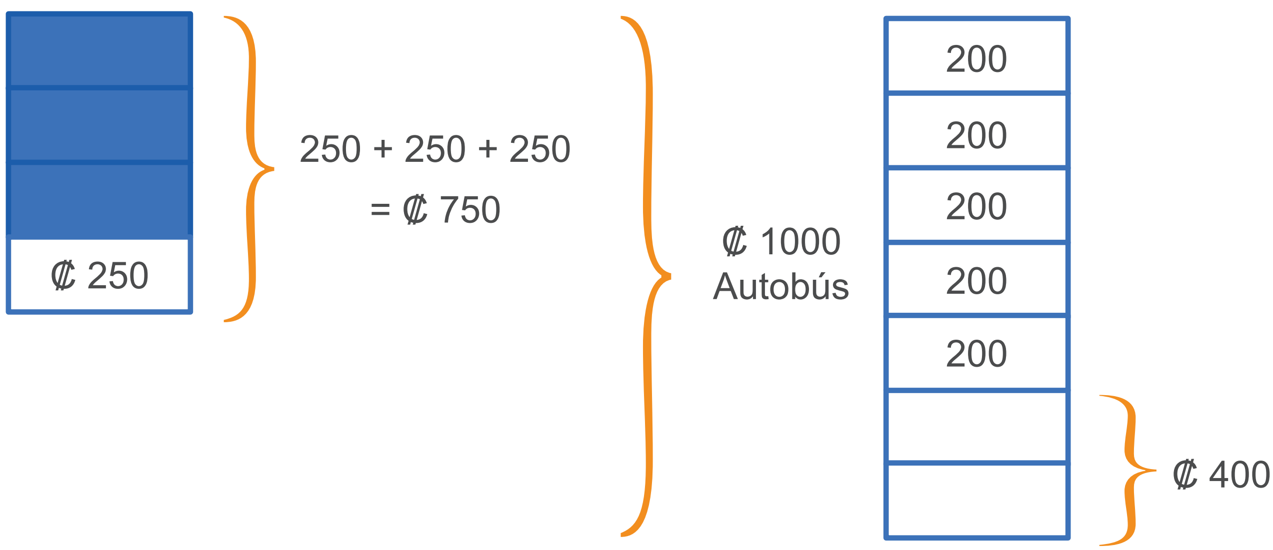
Por lo que inicialmente tenía ₡1000.

Si gastó $\frac{2}{7}$ en pasaje y le sobran ₡1000.

Entonces $\frac{5}{7}$ son ₡1000

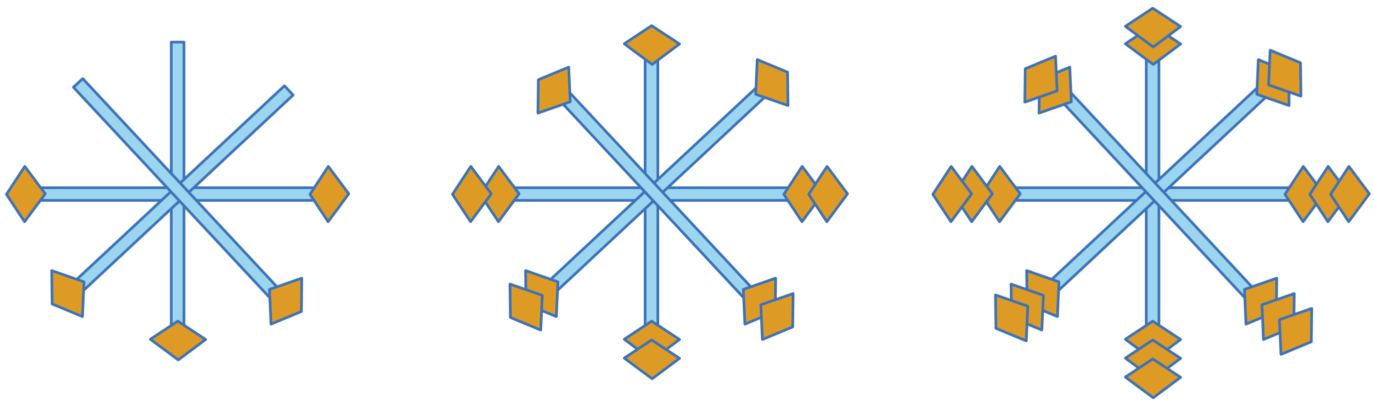
Por lo que inicialmente tenía ₡1400.

Entonces Javi gastó ₡400 en el pasaje.



Javi gastó ₡400 en el pasaje.

30. Adela está construyendo un móvil o carrusel de cuna para un bebé. Ella tiene la estructura del móvil y va agregando piezas decorativas cada día siguiendo una regla establecida por ella, la cual se aprecia en la figura:



día 1 día 2 día 3

a. ¿Cuántas piezas decorativas tendrá el móvil el día 7?

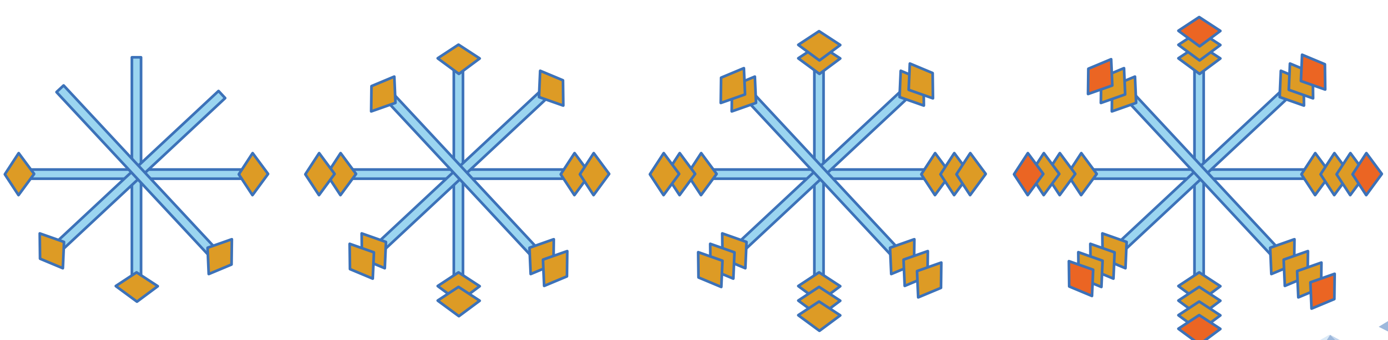
b. Explique el patrón que ha utilizado Adela para decorar el móvil.

c. ¿Cuántos días tardará decorando el móvil si solo tiene 181 piezas?

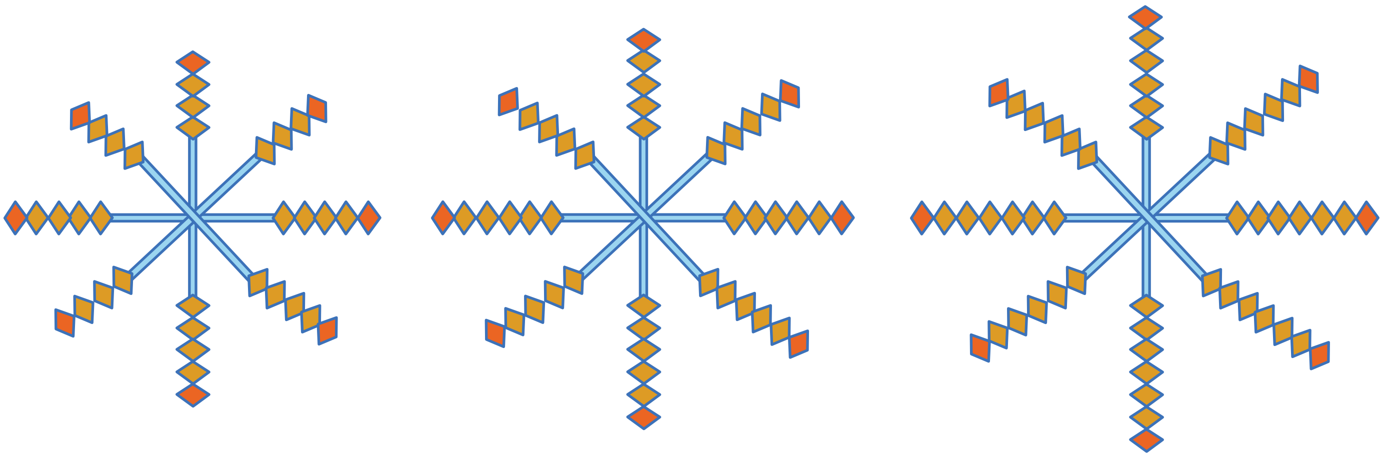
Parte "a"

Opción 1

Seguir construyendo figuras hasta llegar a la figura 7



día 1 día 2 día 3 día 4



día 5 día 6 día 7

Observar que tendría 53 piezas.

Opción 2

Realiza una tabla para observar la relación entre el día y la cantidad de piezas

Día		Cantidad de piezas
1		5
2	5 + 8	13
3	13 + 8	21
4	21 + 8	29
5	29 + 8	37
6	37 + 8	45
7	45 + 8	53

Por lo que el día 7 tendrá 53 piezas.

Opción 3

Realiza una tabla para observar la relación entre el día y la cantidad de piezas

Día		Cantidad de piezas
1	1 x 8 - 3	5
2	2 x 8 - 3	13
3	3 x 8 - 3	21
4	4 x 8 - 3	29
5	5 x 8 - 3	37
6	6 x 8 - 3	45
7	7 x 8 - 3	53

Por lo que el día 7 tendrá 53 piezas.

Parte "b"

Opción 1

Inicia colocando cinco piezas y cada día agrega 8 piezas más respecto al anterior. Por lo que para determinar las piezas de cualquier día solo suma 8 a las piezas del día anterior.

Opción 2

Multiplico el número de día por ocho y le resto tres.

Parte "c"

Opción 1

Utilizando la respuesta #3 la respuesta anterior.

181 + 3 = 184 → 23 x 8 - 3 = 181

Entonces tardaría 23 días.

Opción 2

Mediante una tabla continuar calculando valores, a partir de las respuestas #2 o #3 a la pregunta anterior, hasta llegar a la figura con 181 piezas.

Día	Piezas
1	5
2	13
3	21
4	29
5	37
6	45
7	53
8	61
9	69
10	77
11	85
12	93
13	101
14	109
15	117
16	125
17	133
18	141
19	149
20	157
21	165
22	173
23	181

Observando que tardaría 23 días.

31. En un ascensor con una capacidad máxima de 400 kg van 5 personas cuyo promedio de sus pesos (masas) es de 76 kg. Se sabe que salió una de esas personas del ascensor y entro otra, de tal forma que se cumplen las siguientes condiciones:

- El nuevo promedio de las cinco personas que están en el ascensor aumentó.
- El nuevo total de los pesos de las cinco personas del ascensor es menor que la capacidad máxima del ascensor.

a. Si la diferencia de los pesos de la persona que entró y la persona que salió del ascensor es de 12 kg, entonces, ¿cuál es el nuevo promedio de las cinco personas del ascensor?

b. En el siguiente piso bajó otra persona y el nuevo promedio de pesos es de 72 kg, entonces ¿cuál es el peso de esta persona?

Parte "a"

Total de pesos: $380 + 12 = 392$

Nuevo promedio: $\frac{392}{5} = 78{,}4$ Kg.

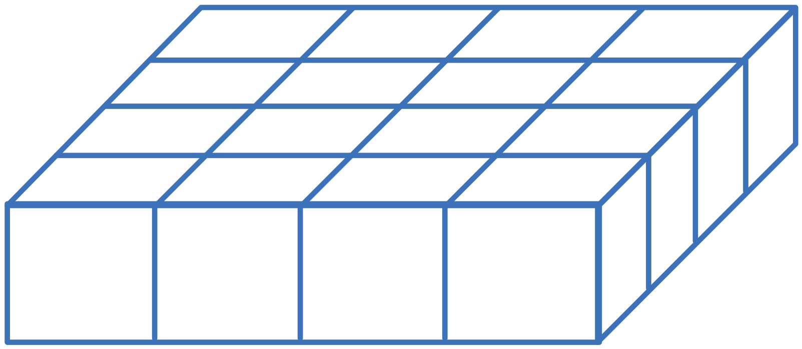
Parte "b"

$72 \times 4 = 288$.

Suma de pesos anterior era 392 y ahora es 288.

La persona que bajó pesa 104 Kg.

32. La figura muestra un bloque de madera de base cuadrada cuyos lados que miden 4 cm y la altura 1 cm. Jimena pintó toda la superficie del bloque de color rojo (incluyendo la parte de abajo) y después lo cortó obteniendo 16 cubitos de 1 cm de arista.

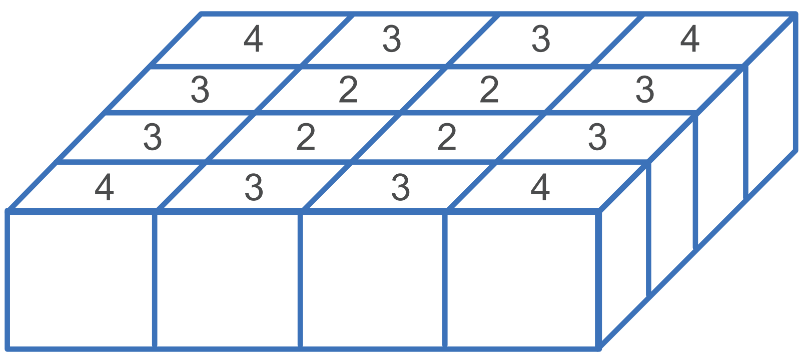


Si Jimena decide darle a su hermano los cubitos que quedaron con exactamente dos caras pintadas de rojo y dejarse ella los que tienen exactamente tres caras rojas, ¿cuántos cubitos le tocan a cada uno? Justifica tu respuesta

¿Cuáles son los cubitos de cada uno? Marque con una "J" los cubitos de Jimena y con una "H" los de su hermano

Al imaginarse la superficie de la figura pintada totalmente de rojo, y luego separar los cubitos y analizar la cantidad de caras pintas con que queda cada cubito, se observa que algunos quedan con 2 caras pintadas, otros con 3 y otros con 4 caras pintadas.

En la figura se señala la cantidad de caras pintadas en cada cubo

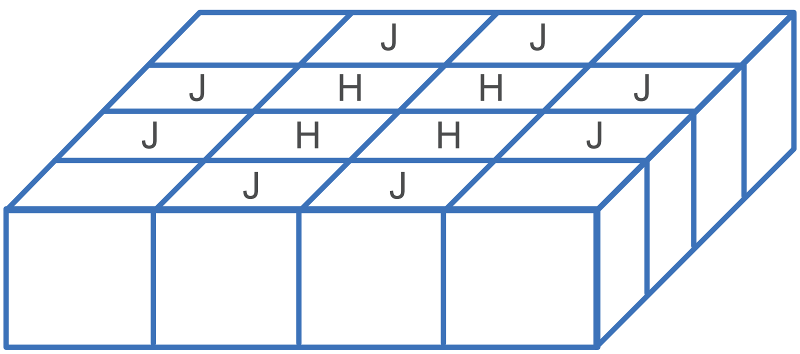


Obteniendo:

- Cuatro cubitos con 2 caras pintadas.
- Ocho cubitos con 3 caras pintadas.
- Cuatro cubitos con 4 caras pintadas.

Por lo que al hermano de Jimena le corresponderían cuatro cubitos y a Jimena le corresponderían ocho cubitos.

En la siguiente figura se señalan los cubitos que le corresponden a cada uno.



Observación:
Recuerde: En primaria utilizamos como signo para la multiplicación la letra “x” sin embargo podemos valorar el uso del punto para ir familiarizando a los niños con esta otra forma de representar esta operación en la secundaria.

Créditos
Los ítems fueron tomados de la prueba de la II y III Etapa de la Olimpiada Costarricense de Matemática de primer año 2019, elaborada por:

- **Yadira Barrantes Bogantes**, asesora regional de Matemática de la Dirección Regional Educativa de Alajuela.
- **Tony Benavides Jiménez**, asesor regional de Matemática de la Dirección Regional Educativa Peninsular.
- **Cristian Barrientos Quesada**, asesor regional de Matemática de la Dirección Regional Educativa de Puntarenas.
- **Javier Barquero Rodríguez**, asesor regional de Matemática de la Dirección Regional Educativa de Puriscal.
- **Hermes Mena Picado**, asesor nacional de Matemática del Departamento de Primero y Segundo Ciclos.
- **Gabriela Valverde Soto**, profesora de Matemática de la Escuela de Formación Docente, Universidad de Costa Rica.
- **Mónica Mora Badilla**, profesora de Matemática de la Escuela de Formación Docente, Universidad de Costa Rica.
- **Carlos Alfaro Rivera**, profesor de Matemática. Escuela de Formación Docente, Universidad de Costa Rica.

Revisores (as) de los cuadernillos

Mónica Mora Badilla. Profesora de Matemática. Escuela de Formación Docente, Universidad de Costa Rica.
Gabriela Valverde Soto. Profesora de Matemática. Escuela de Formación Docente, Universidad de Costa Rica.
Carlos Alfaro Rivera. Profesor de Matemática. Escuela de Formación Docente, Universidad de Costa Rica.

Compilación y estrategias de solución de los cuadernillos realizadas por:

Hermes Mena Picado. Asesoría Nacional de Matemática.
Departamento de Primero y Segundo Ciclos. Dirección de Desarrollo Curricular.

Luis Enrique Marín Vargas. Estudiante de la carrera de Bachillerato y Licenciatura en Educación Primaria. Universidad de Costa Rica.

Ministerio de
Educación Pública

Ministerio de Educación Pública
Dirección de Desarrollo Curricular

Olimpiada Nacional
de Matemática en Primaria

UNIVERSIDAD DE
COSTA RICA