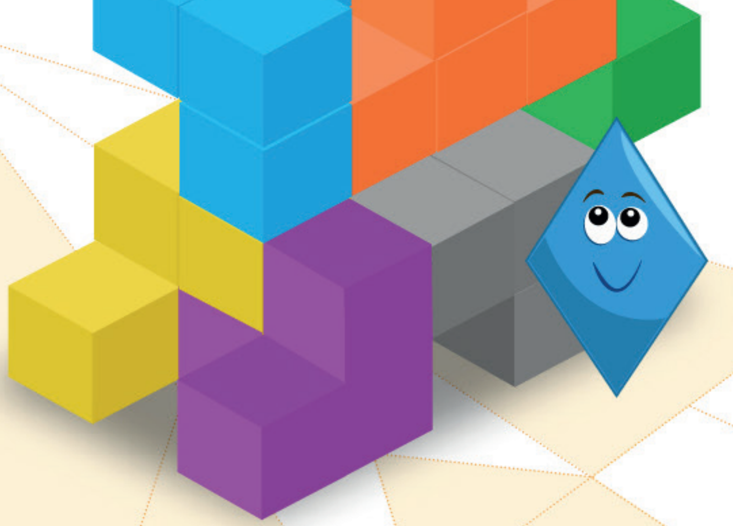
Ministerio de Educación Pública
Dirección de Desarrollo Curricular
Departamento de Primero y Segundo Ciclos
Asesoría Nacional de Matemática

# 6 CUADERNILLO DE APOYO PARA EL DOCENTE

## Olimpiada Costarricense de Matemática para Educación Primaria OLCOMEP-2021

## SEXTO AÑO



# PRESENTACIÓN

Es fundamental que nuestro sistema educativo fomente en la sociedad costarricense, todas las actividades posibles orientadas a estimular el desarrollo científico y tecnológico, a efecto de formar personas con las habilidades necesarias para hacer frente a los retos y demandas contemporáneas.

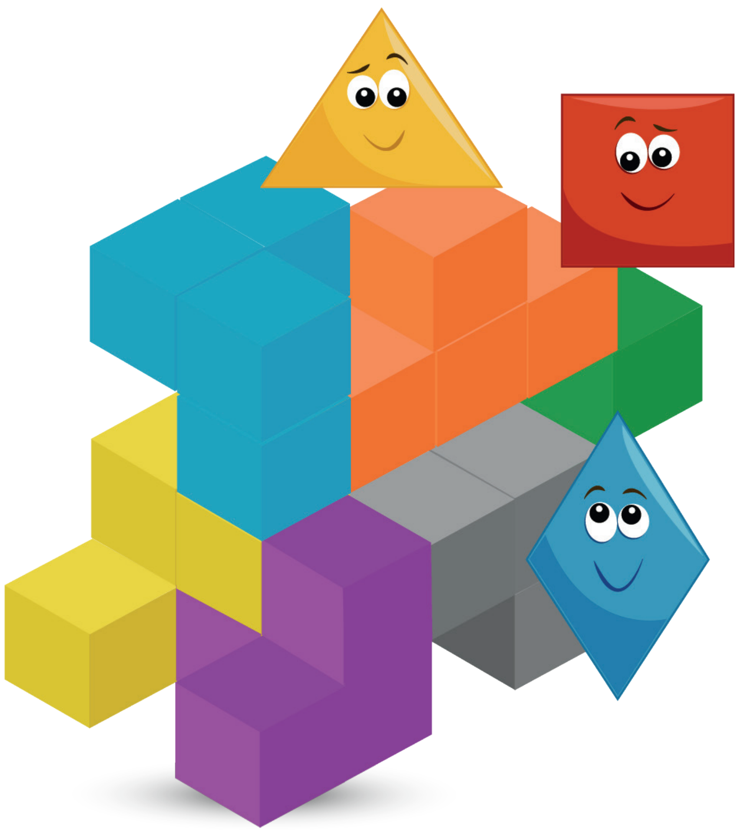
La enseñanza de la matemática ocupa un papel clave en el currículo escolar y persigue el desarrollo de un proceso intelectual en los estudiantes. La Olimpiada Costarricense de Matemática para Educación Primaria **OLCOMEP**, tiene como finalidad estimular y desarrollar entre los niños y niñas sus capacidades de resolución de problemas matemáticos, por medio de una competencia de conocimiento sana entre estudiantes de diferentes regiones educativas del país.

El presente cuadernillo pretende ser un insumo de apoyo para el docente y práctica para el estudiante. El mismo busca orientar a los y las participantes de la **OLCOMEP**, por medio de la presentación de problemas recopilados de las pruebas aplicadas en ediciones anteriores de la misma olimpiada. Su contenido pretende dar pautas sobre los tipos de problemas a los que se van a enfrentar los y las estudiantes en las diferentes etapas que comprende la **OLCOMEP**, así como sus diferentes estrategias de resolución.

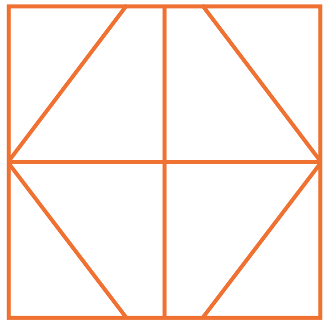
Los problemas aquí seleccionados se fundamentan en situaciones matemáticas donde se requiera manifestar las habilidades que caractericen el talento matemático para lograr su resolución, basados en los niveles de complejidad de los problemas descritos en el Programa de Estudio en Matemáticas (MEP, 2012) y por medio de los diferentes contextos que se consideran para la olimpiada.

**Comisión Central de OLCOMEP**

# PROBLEMAS DE REPASO



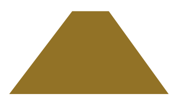
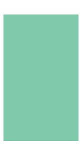
**1.** Observe la siguiente figura:



¿Cuántos cuadriláteros pueden identificarse en la figura?

**Solución**

Teniendo en cuenta que los cuadriláteros son polígonos de cuatro lados que no tienen que tener la misma medida siempre, lo que hacemos es identificar cuántas figuras cumplen esas condiciones, como se muestra en la siguiente tabla:

| Tipo de cuadrilátero | Cantidad en la figura original | Tipo de cuadrilátero | Cantidad en la figura original |
|---|---|---|---|
|  | 4 |  | 1 |
|  | 1 |  | 1 |
|  | 2 |  | 2 |
|  | 2 |  | 2 |

Luego sumamos la cantidad de cuadriláteros en total y se obtiene que son 15.

**2.** En el campeonato de Ping Pong de la escuela el total de participantes se dividen en dos grupos. En cada grupo todos se enfrentan entre ellos acumulando puntos por cada gane, al final pasarán a la siguiente ronda los dos con más puntos de cada grupo. Jugarán el segundo de un grupo contra el primero del otro y viceversa, los dos ganadores de estos juegos disputarán la gran final.

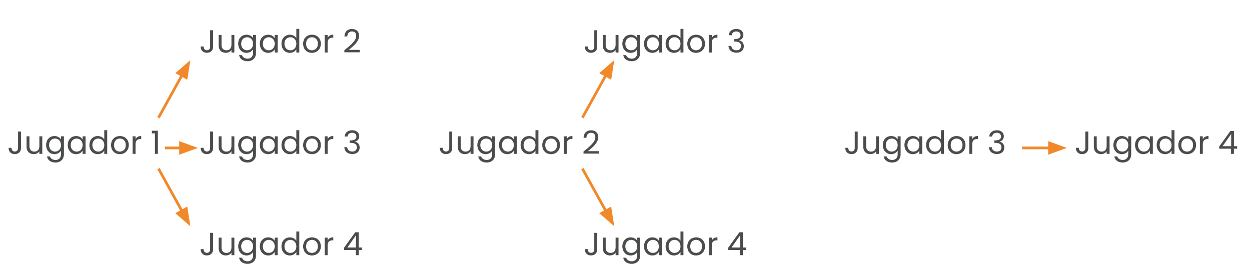
¿Cuántos partidos se jugarán en total si se inscriben ocho jugadores?

**Solución**

Hay dos equipos con 4 jugadores cada uno:

| **Equipo A** | **Equipo B** |
|---|---|
| Jugador 1 | Jugador 5 |
| Jugador 2 | Jugador 6 |
| Jugador 3 | Jugador 7 |
| Jugador 4 | Jugador 8 |

Como los jugadores de un mismo equipo se enfrentan entre sí, ilustremos lo que la cantidad de juegos que se desarrollan en la primera ronda del equipo A:



Con el equipo B sucede algo similar porque tiene la misma cantidad de jugadores y las mismas reglas. Así, se obtienen 6 juegos del equipo A y 6 juegos del equipo B.

Según la descripción del problema, a la siguiente ronda pasan los dos jugadores de cada equipo con mayor puntaje. Jugarán el segundo de un grupo con el primero del otro. Por ejemplo:

| **Equipo A** | **Equipo B** |
|---|---|
| Jugador 1 | Jugador 5 |
| Jugador 3 | Jugador 7 |

Por tanto, la segunda ronda implica dos juegos más y los dos ganadores se enfrentarán en la final que sumaría un juego más.

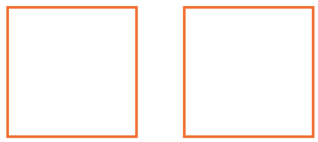
Finalmente, se calculan la cantidad de juegos: 6 + 6 + 2 + 1 = 15.

**Respuesta:** Si se inscriben 8 jugadores, se realizarán 15 partidos en total.

**3.** ¿Cuántos números de dos cifras menores que cien cumplen que la suma de sus dígitos es 7?

**Solución**

Se tienen dos espacios para formar el número de dos cifras:



Identificamos cuáles números podríamos colocar en el primer espacio, este no debe ser mayor que 7 porque la suma de ambos debe ser 7.  Estos serían: 1 , 2, 3, 4, 5, 6 y 7, note que el cero no puede ir de primero, porque indicaría 0 decenas y por tanto, el número formado tendría solo una cifra.

Luego, analizamos cuáles números se podrían ubicar en el segundo espacio, igual que en el primero no puede ser mayor a 7. Estos serían: 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6.
Seguidamente, formamos combinaciones numéricas para que al sumarlos den 7.  Así obtenemos que:  7+0, 6+1, 5+2 y 4+3 todos dan como resultado 7.

Se debe recordar que no es lo mismo ubicar de primero un 5 y de segundo un 2, que primero un 2 y luego un 5, por lo tanto, cuentan las combinaciones 1+6, 2+5 y 3+4.  De esta manera, los números formados son: 70, 61, 52, 43, 16, 25 y 35, siendo en total **7**.

**4.** En la sección 6-2 hay igual cantidad de estudiantes que de pupitres. Si los pupitres se colocan en filas de cinco faltaría uno para completar la última fila, si se colocan en filas de cuatro queda una fila con dos.

Cuando los estudiantes trabajan en grupos de tres queda una fila con dos estudiantes, pero si trabajan en parejas, todas las filas quedan con la misma cantidad.

¿Cuántos estudiantes hay en la sección 6-2, si se sabe que ninguna sección tiene más de 35?

**Solución**
Se analiza la cantidad de estudiantes que se sienta en cada fila, cuando se acomodan de cinco en cinco, de cuatro en cuatro, de tres en tres y de dos en dos.

Se identifica la característica del número que buscamos y se interpreta cada una, de acuerdo con los conocimientos matemáticos sobre divisibilidad y múltiplos, por ejemplo.

Veamos:

**1)** "Si se colocan en filas de cinco faltaría uno para completar la última fila", esto significa que el número buscado no es divisible por 5.
**2)** "Si se colocan en filas de cuatro queda una fila con dos", lo que indica que el número buscado no es divisible por 4.
**3)** "Si trabajan en grupos de tres queda una fila con dos estudiantes", se infiere que el número en cuestión no es múltiplo de tres.

**5.** Pedro se ha tomado una pastilla de "chiquitolina", la cual disminuye su tamaño en 18 veces. Ahora Pedro tiene una estatura de 9,3 cm.

Cada hora que transcurre, posterior a haberse tomado la pastilla, Pedro tiene un aumento de 1 ½ de su estatura actual, ¿cuál será la diferencia entre la estatura de Pedro antes de tomarse la pastilla y la estatura que tendrá una hora después de tomarse la pastilla?

**Solución**

Como Pedro quedó midiendo 9,3 cm después de tomarse la pastilla y se redujo 18 veces, esto significa que originalmente él medía 9,3 cm x 18, con lo que se obtiene 167,4 cm.

Después de una hora aumenta $1\frac{1}{2}$ de su estatura actual, con lo que se interpreta que crece todo lo que medía más la mitad, para esto es necesario calcular 9,3 cm ÷ 2 = 4,65 cm. Veámoslo en la siguiente imagen:

Estatura actual — Aumenta en $1\frac{1}{2}$

**= 23,25 cm**

9,3 cm — 9,3 cm + 4,65 cm

Para calcular la diferencia de estatura antes de tomar la pastilla y después de una hora de ingerida, hacemos 167,4 cm – 23,25 cm, con lo que se obtiene 144,15 cm.

**Respuesta:** La diferencia buscada es 144,15 cm.

**6.** En la placa conmemorativa de la escultura del famoso "Miguel de los Numerales", nacido en 1978 dice:

***"Vivió tantos años como la suma de los dígitos de su año de nacimiento".***

¿Hace cuantos años murió Miguel de los Numerales?

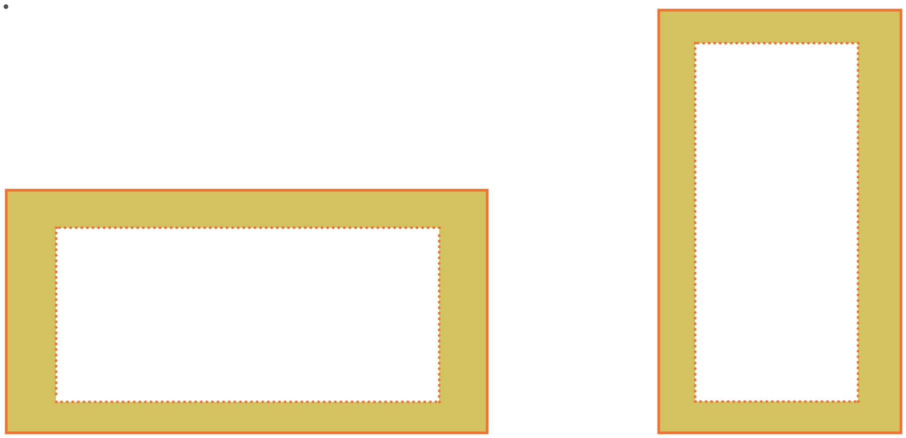
**Solución:**

Con el fin de calcular la cantidad de años vividos por "Miguel de los Numerales", se suman los dígitos de su año de nacimiento, esto es: 1+9+7+8 = 25. Luego para averiguar el año de su muerte se hace la suma del año de nacimiento con la cantidad de años vividos, así: 1978+25 = 2003.

Finalmente, se calcula hace cuánto murió restándole al año actual, en este caso, 2020, el año en que falleció. Esto sería: 2020-2003=17.

**Respuesta:** *"Miguel de los Numerales"* murió hace 17 años.

**7.** En las instrucciones de un trabajo escolar se indica que debe construirse un póster en una cartulina de 90cm por 1,20m. Además, se especifica que debe haber un margen de 3cm a los lados de la cartulina, y un margen de 2,5 cm en la parte superior e inferior.



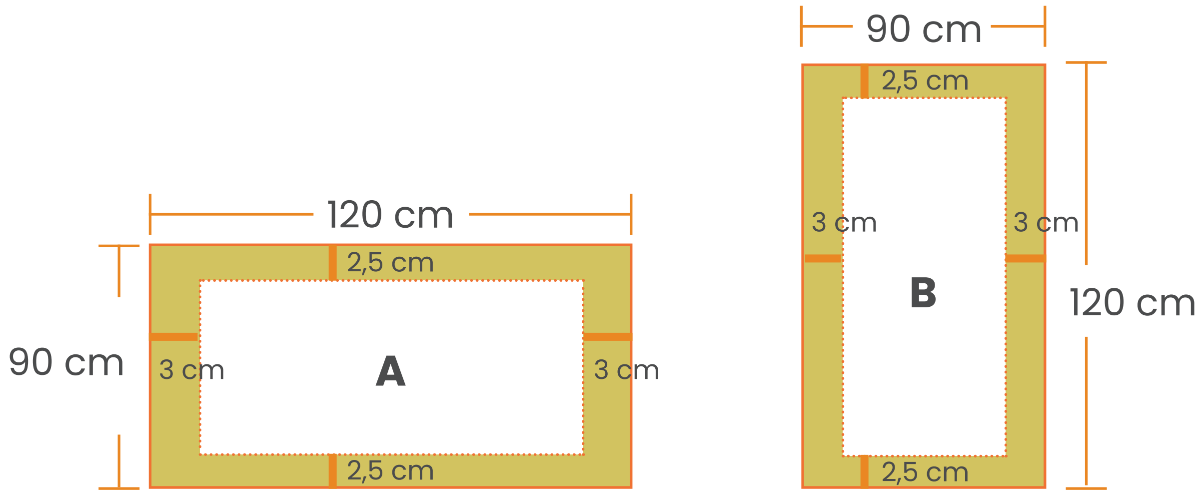
Si los márgenes se representan con color gris, ¿cuál es la diferencia en centímetros cuadrados de la superficie editable en los posters anteriores?

**Solución**

Lo primero es tener todas las medidas en centímetros para realizar operaciones aritméticas. Solo la medida del largo de la cartulina está en metros, por lo tanto:

1,20 m = $\underline{120}$ cm

Luego colocamos todas las medidas que tenemos en ambas cartulinas:




Requerimos calcular las áreas de ambos rectángulos blancos (A y B), para comparar la superficie editable, por esto es necesario obtener las dimensiones de cada lado.

Notemos que el largo del rectángulo A se puede calcular restándole el margen izquierdo y el margen derecho al largo original de la cartulina, así: 120 – 3 – 3 = 114 cm, el ancho del rectángulo A se obtiene restándole el margen superior y el margen inferior al ancho original de la cartulina, esto sería 90 – 2,5 – 2,5 = 85 cm. Por tanto, el área del rectángulo A se calcula mediante la siguiente fórmula:

A = $\ell$ x $a$ sustituimos los valores del largo y el ancho y obtenemos: A= 114 cm x 85 cm

A= 9690 $cm^2$

Similarmente, se calcula el área del rectángulo B.

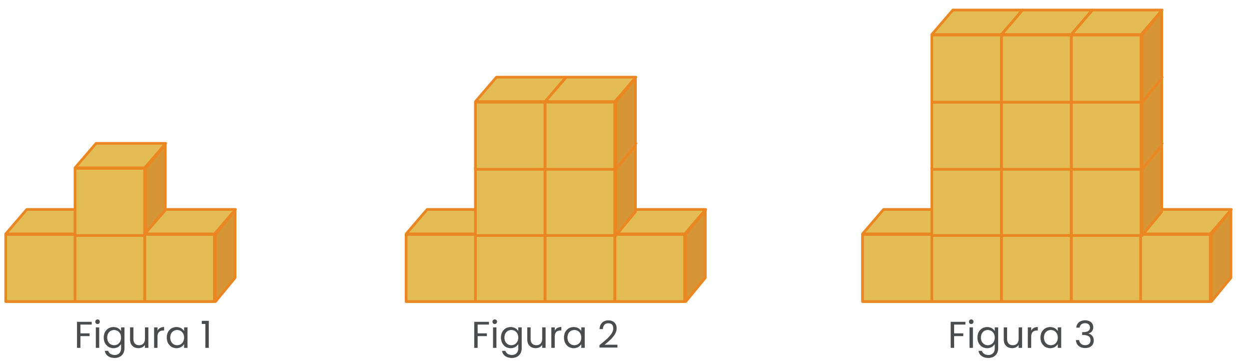
El largo del rectángulo B se obtiene restándole el margen superior y el margen inferior al largo original de la cartulina, así: 120 – 2,5 – 2,5 = 115 cm, el ancho del rectángulo B se calcula restándole el margen izquierdo y el margen derecho al ancho original de la cartulina, esto sería 90 – 3 – 3 = 84 cm. Por tanto, el área del rectángulo A se calcula mediante la siguiente fórmula:

$A = \ell \times a$ sustituimos los valores del largo y el ancho y obtenemos:
A= 115 cm x 84 cm
A= 9660 $cm^2$

Por tanto, la superficie del póster A mide 9690 $cm^2$ y la del póster B es 9660 $cm^2$, así la diferencia entre ambas es 9690-9660 = 30 $cm^2$

**Respuesta:** La diferencia entre las superficies de los posters es 30 $cm^2$

**8.** Observe la siguiente secuencia de figuras formadas por cubos:

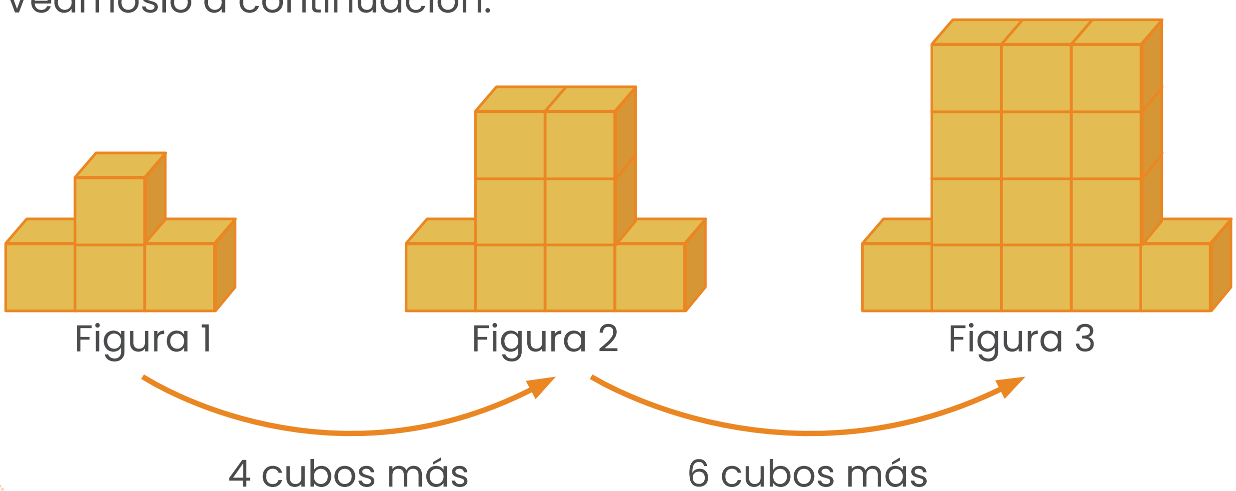



Si se mantiene el mismo patrón, ¿cuántos cubos conforman la figura en la posición 12?

**Solución**

Lo primero es contar la cantidad de cubos que forma cada figura, así la 1 tiene 4, la 2 tiene 8 y la 3 tiene 14.

Luego, nos abocamos a identificar el patrón de la cantidad de cubos que forma cada figura, para esto, notamos que de la figura 1 a la 2 el incremento fue de 4, de la 2 a la 3, fue de 6. Veámoslo a continuación:

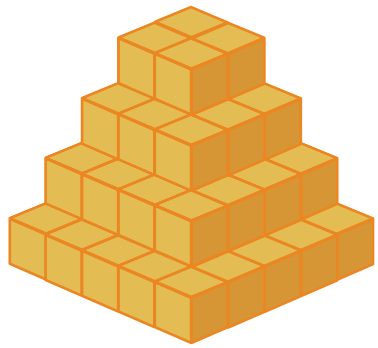


Entonces deducimos que la cantidad de cubos de la siguiente figura se calcula sumándole a la anterior 8 y la siguiente sumándole 10 y así sucesivamente hasta llegar a la figura 12 como se muestra en la siguiente tabla:

| Nº de figura | Patrón | Cantidad de cubos |
|---|---|---|
| 1 | 4 | 4 |
| 2 | 4 + **4** | 8 |
| 3 | 8 + **6** | 14 |
| 4 | 14 + **8** | 22 |
| 5 | 22 + **10** | 32 |
| 6 | 32 + **12** | 44 |
| 7 | 44 + **14** | 58 |
| 8 | 58 + **16** | 74 |
| 9 | 74 + **18** | 92 |
| 10 | 92 + **20** | 112 |
| 11 | 112 + **22** | 134 |
| 12 | 134 + **24** | 158 |

**Respuesta:** 158 cubos conforman la figura 12.

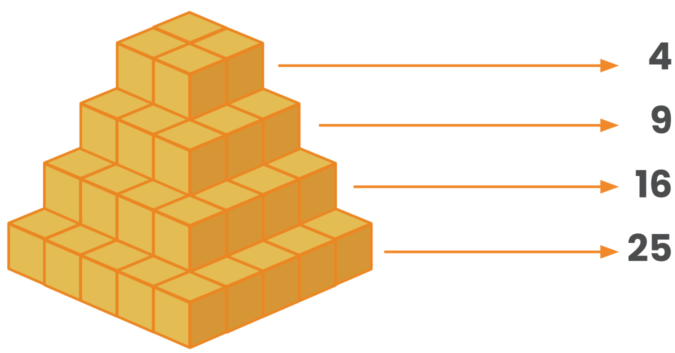
**9.** A partir de la siguiente figura conformada por cubitos todos del mismo tamaño:



¿Cuántos cubitos pequeños hace falta colocar en la figura para completar un cubo grande de 5x5 cubitos?

**Solución**

Empecemos calculando la cantidad de cubos que hay en cada piso, puede elegirse de arriba abajo o de abajo arriba.




Se quiere que cada piso cuente con 25 cubos para completar el cubo final de 5x5. Por esta razón, calculamos cuántos cubos le faltan a cada piso para llegar a 25, note que el primer piso está completo y para los otros tres tenemos:

Al segundo piso le faltan 25-16 = 9, al tercero le faltan 25-9 = 16, al cuarto piso le faltan 25-4 = 21.

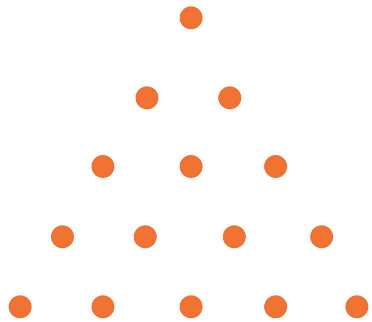
Hasta aquí, nos faltarían 9+15+21 = 46.

Sin embargo, es muy importante notar que como se requiere completar un cubo de 5x5, debemos tener 5 pisos de altura y en la figura se muestran 4, por esta razón, decimos que al quinto piso le faltan 25 cubos.

Por tanto, a 46 le sumamos 25 y obtenemos 71.

**Respuesta:** Faltan 71 cubos para completar el cubo 5x5.

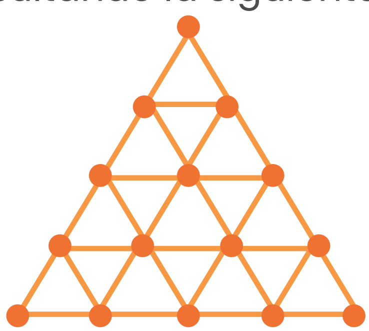
**10.** Analice la siguiente trama de puntos con forma de triángulo equilátero:



¿Cuál es la mayor cantidad de triángulos equiláteros que pueden formarse?

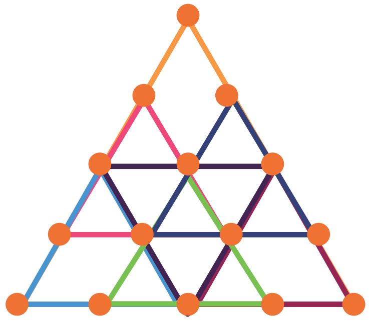
**Solución**

Empezamos formando triángulos uniendo dos puntos para cada uno de sus lados, resultando la siguiente figura:



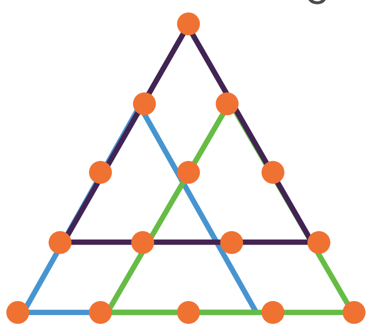
Así encontramos **16** triángulos.

Luego formemos triángulos uniendo tres puntos para cada uno de sus lados, de la siguiente manera:



Notemos que encontramos **7** triángulos equiláteros: 4 en la misma posición y 1 invertido (de cabeza).

Seguidamente, formamos triángulos uniendo cuatro puntos para cada uno de sus lados, veamos la siguiente figura:



En este caso, ubicamos solo **3**.

Posteriormente, analizamos si es posible formar más triángulos y nos percatamos de que falta uno, el que une cinco puntos para cada uno de los lados.

Calculamos el total sumando 16+7+3+1=27

**Respuesta:** El mayor número de triángulos equiláteros que se pueden formar a partir de los puntos rojos es 27.

**11.** Diremos que un número es "ceroable" si utilizando todos sus dígitos una única vez, unidos por medio de las operaciones básicas ( )da como resultado cero.

Por ejemplo; el número es "ceroable" puesto que: $2 \times 3 - 6 = 0$

Con base en el concepto anterior y dadas las cantidades 832, 437 y 973, ¿Cuál de ellas es "ceroable"?

**Solución**

La situación propuesta nos obliga a probar las operaciones entre los dígitos de cada cantidad, respetando la prioridad de la multiplicación y la división. En este caso, vemos que es posible obtener cero trabajando con 437.

$$4 + 3 - 7 = 0$$

**Respuesta:** La cantidad 437 es ceroable.

**12.** Laura está en la universidad y su hermana está en la escuela. Laura es nueve años mayor que su hermana, y las edades de ambas están formadas por las mismas cifras pero en diferente orden.

¿Cuál es la suma de las edades de Laura y su hermana?

**Solución**

Se deduce que las edades de ambas deben estar formadas por al menos dos cifras, ya que, Laura es 9 años mayor que su hermana y sus edades deben formarse como resultado de la combinación de las mismas cifras.

Como la hermana de Laura está en la Escuela, se deduce que debe tener entre 5 y 13 años aproximadamente, el 10 se descarta porque una no puede tener un año, el 11 se elimina porque al cambiarle el orden el número es el mismo, así nos quedan: 12 y 13.

Analizamos cada caso, calculando la diferencia de edades:

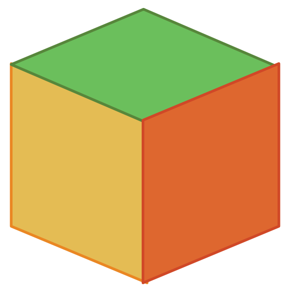
| Edad de Laura | Edad de la hermana de Laura | Diferencia entre edades |
|---|---|---|
| 12 | 21 | **9** |
| 13 | 31 | 18 |

Encontramos que 12 y 21 cumplen las condiciones descritas en el problema, así que los sumamos para obtener la respuesta solicitada:  12+21= 33

**Respuesta:** La suma de las edades de Laura y su hermana da como resultado 33.

**13.** Si se construye un prisma de base cuadrada, con sus caras opuestas de igual color, tal que el área de la cara verde es de 16cm2, el área de la cara roja es 20cm$^2$ cada una, tal y como se muestra en la figura adjunta.

¿Cuál es el volumen del prisma en centímetros cúbicos?



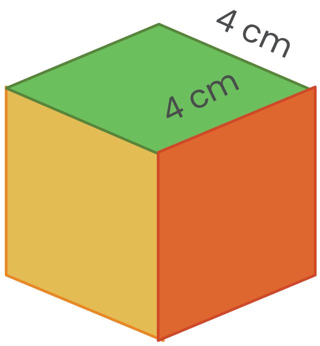
**Solución**

El volumen de un prisma se calcula multiplicando el área de la base por la altura, en este caso tenemos el primer dato pero no el segundo, por esta razón empezamos a analizar los otros valores que se nos dan en el problema, para encontrar medidas de las aristas.

Se sabe que la base es cuadrada y que su área es 16 cm$^2$. Como el área de un cuadrado se obtiene multiplicando lado por lado, se tiene:

$$A = \int x \int = 16 \text{ cm}^2$$

Esto significa que debemos buscar un número que al multiplicarlo por el mismo dé 16. Dicho número es 4, de esta manera ya conocemos el valor del lado del cuadrado verde.




$A = b \times a = 20\ cm^2$

Tomando en consideración que el área del rectángulo rojo es 20 $cm^2$ y que se calcula multiplicando base por altura, y la primera corresponde al lado del cuadrado verde, se tiene:

$$A = 4 \times a = 20\ cm^2$$

Seguidamente, buscamos un número que al multiplicarlo por 4 dé 20. Este número es 5, por lo que la altura del rectángulo y del prisma es 5 cm.

Con estos datos, podemos calcular el volumen del prisma.

$$V = \text{Área}_{\text{basal}} \times h$$

$$V = 16 \times 5 = 80\ cm^3$$

**Respuesta:** El volumen del prisma es 80 $cm^3$.

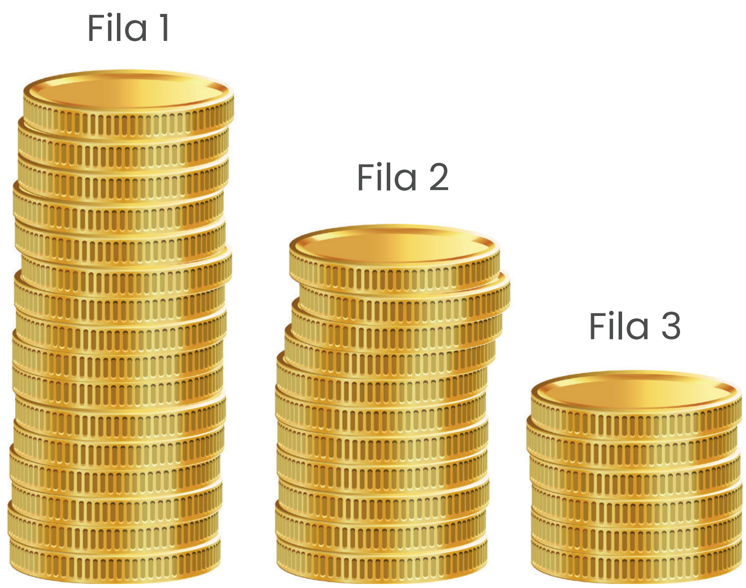
**14.** Tatiana tiene 35 monedas apiladas en filas, la primera fila tiene solo monedas de ₡ 25, la segunda solo monedas de ₡ 50 y la tercera solo monedas de ₡ 100.

Si en la segunda fila tiene el doble que en la tercera y en la primera tiene el doble que en la segunda.

¿Cuánto dinero tiene Tatiana?

**Solución**

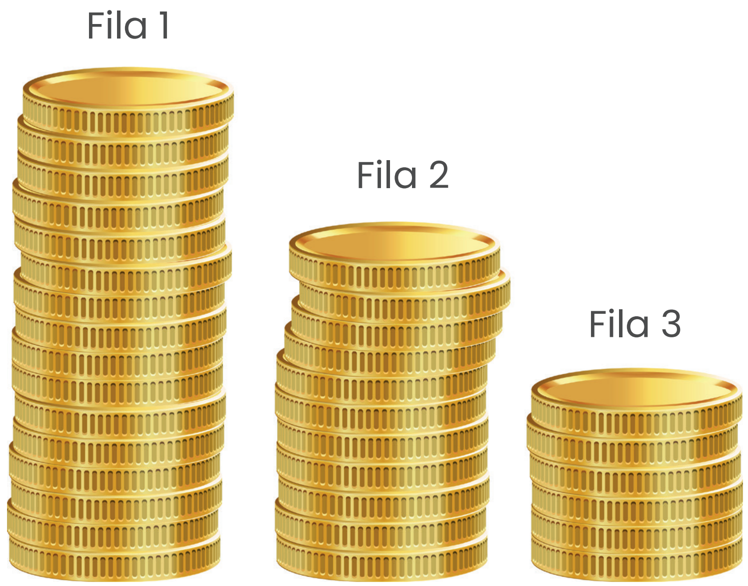
La situación se puede representar gráficamente de la siguiente manera:




Se sabe que la fila 2 tiene el doble de la fila 3 y la fila 1 el doble de la 2, esto significa que buscamos tres números que el segundo sea el doble del tercero y el primero sea cuatro veces el tercero y que sumados den 35.

Se analizan varias combinaciones y se obtiene que 20 (es cuatro veces 5), 10 (es el doble de 5), por lo que la terna buscada es 20 en la primera fila, 10 en la segunda y 5 en la tercera.

Luego, se calcula el dinero que se tiene en cada fila, según el tipo de moneda que contienen. Así,




25 x 20 = 500   50 x 10 = 500   5 x 100 = 500

Finalmente, se suman las tres cantidades 500+500+500= 1500 colones.

**Respuesta:** Tatiana tiene 1500 colones.

**15.** La suma de tres números naturales es 60. Si se sabe que la diferencia entre los dos menores es de 8 y la diferencia entre los dos mayores es 23.

¿Cuál es el segundo número?

**Solución**

Se puede ilustrar la situación de la siguiente manera:

| Primer número | Segundo número | Tercer número |
|---|---|---|

$$\boxed{\phantom{00}} + \boxed{\phantom{00}} + \boxed{\phantom{00}} = 60$$

La diferencia es 8 La diferencia es 23

Se prueban varias combinaciones de números y se encuentra que la buscada es:

| Primer número | Segundo número | Tercer número |
|---|---|---|

$$\boxed{7} + \boxed{15} + \boxed{38} = 60$$

La diferencia es 8 La diferencia es 23

**Respuesta:** El segundo número es 15.

**16.** Considere la siguiente información:

Dos números primos se llaman primos gemelos si su diferencia es de 2. Por ejemplo 5 y 7 son dos números primos gemelos, porque 7 - 5 = 2

Con base en la información anterior, determine todos los primos gemelos que están entre 50 y 110.

**Solución**

Primero escribimos todos los números primos entre 50 y 110 como se muestra: 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107 y 109

Luego calculamos la diferencia entre ellos:

| **Diferencia entre primos** | |
|---|---|
| 59 - 53 | 6 |
| **61 - 59** | **2** |
| 67 - 61 | 6 |
| 71 - 67 | 4 |
| **73 - 71** | **2** |
| 79 - 73 | 6 |
| 83 - 79 | 4 |
| 89 - 83 | 6 |
| 97 - 89 | 8 |
| 101 - 97 | 4 |
| **103 - 101** | **2** |

| **Diferencia entre primos** | |
|---|---|
| 107 - 103 | 4 |
| **109 - 107** | **2** |

Notemos que solo cuatro parejas cumplen la condición de ser primos gemelos.

**Respuesta:** Todos los primos gemelos entre 50 y 110 son: 59 - 61, 71 -73, 101 - 103, 107 – 109.

**17.** Los estudiantes recolectan algunos datos en casa de la cantidad de botellas que reciclan por semana, calculan las medidas de tendencia central y posteriormente comparan con los de su pareja de trabajo.

María y Pepe recopilaron toda la información y realizaron los cálculos, pero al momento de transcribir la información los dos perdieron un dato de sus tablas, ahora lucen así:

| Reciclaje en casa de María | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Semana | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| Botellas | **7** | **4** | **5** | **-** | **8** | **2** | **5** | **4** |

| Medidas de tendencia central | |
|---|---|
| Moda | 5 |
| Promedio | |

| Reciclaje en casa de Pedro | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Semana | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Botellas | **2** | **3** | **1** | **-** | **4** | **2** |

| Medidas de tendencia central | |
|---|---|
| Moda | |
| Promedio | 2 |

¿Cuál es la suma del dato perdido de Pepe y el de María?

**Solución**

En el caso de María, tenemos el dato de la moda por lo que debemos ver los datos:

| Dato | Veces que se repite |
|---|---|
| 2 | 1 |
| 4 | 2 |
| 5 | 2 |
| 7 | 1 |
| 8 | 1 |

Analizando los datos podemos observar que, si el dato perdido es 2, 7 o 8, la moda no sería 5, si el dato faltante es 4, la moda no sería 5. Por lo que el dato faltante debe ser 5

Así, el dato perdido de María es 5.

En el caso de Pedro, tenemos el promedio que se calculó sumando todos los datos y dividiendo entre la cantidad total de datos. Así:

$$\textit{Promedio} = \frac{2 + 3 + 1 + \_\_\_ + 4 + 2}{6}$$

Sumamos todos los valores que tenemos en el denominar y obtenemos 12, al dividir 12 entre 6, el resultado es 2, como se indica en el problema. Esto significa que el número perdido de Pedro es 0.

Finalmente, hacemos la suma de ambos números perdidos y obtenemos: 5+0 = 5.

**Respuesta:** La suma de los datos perdidos de Pedro y María es 5.

**18.** El promedio de las estaturas de los 13 estudiantes de la sección 6-2 es de 130 cm. Si en el tercer trimestre llegan dos estudiantes nuevos que miden 124cm y 130cm. ¿Cuál será ahora el promedio de estaturas?

**Solución**

El promedio se calcula sumando todos los datos y dividiendo entre la cantidad total de datos, por lo que al inicio del año se tuvo:

$$\textit{Promedio} = \frac{1690}{13} = 130$$

Para averiguar el valor de la suma de las alturas se multiplica 130 x 13= 1690

Como en el tercer trimestre ingresan dos estudiantes, necesitamos agregar a la sumatoria los datos de las estaturas de ambos y dividir por 15 porque son 13 +2 alumnos en la sección 6-2. Veámoslo:

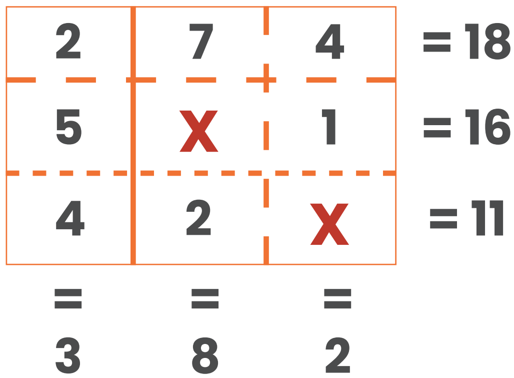
$$\textit{Promedio} = \frac{1690 + 124 + 130}{15}$$

$$\textit{Promedio} = \frac{1944}{15}$$

$$\textit{Promedio} = 129{,}6 \text{ cm}$$

**Respuesta:** El promedio de estaturas en el tercer trimestre es de 129,6 cm.

**19.** Observe el siguiente cuadrado, en el cual cada tipo de línea esconde una operación que se realiza horizontal o verticalmente, estando en el exterior del cuadrado el resultado de operar de forma horizontal o vertical, según corresponda:




De acuerdo a la información brindada en el cuadrado, ¿cuál es la suma de las cifras desconocidas?

**Solución**

Este ejercicio se resuelve utilizando cálculo mental y el método de tanteo, se prueban diferentes operaciones para lograr los resultados indicados.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | x | 7 | + | 4 | = 18 |
| + | | + | | + | |
| 5 | x | X=3 | + | 1 | = 16 |
| – | | – | | – | |
| 4 | x | 2 | + | X=3 | = 11 |
| = | | = | | = | |
| 3 | | 8 | | 2 | |

En el cuadro anterior se nota que las cifras desconocidas tienen el mismo valor y es 3.

**Respuesta:** La suma de las cifras desconocidas es 6.

**20.** En un juego de azar, se lanzan dos dados numerados del uno al seis, gana quien acierte el número que resultará de la suma de los dos valores obtenidos en el dado.

¿Cuál número te daría la mayor probabilidad de acertar?

**Solución 1**

Se utiliza la enumeración en pares para obtener la matriz de resultados posibles y las sumas respectivas:

| | Segundo dado | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Primer dado** | **1** | | **2** | | **3** | | **4** | | **5** | | **6** | |
| | **Par** | **S** | **Par** | **S** | **Par** | **S** | **Par** | **S** | **Par** | **S** | **Par** | **S** |
| 1 | (1,1) | 2 | (1,2) | 3 | (1,3) | 4 | (1,4) | 5 | (1,5) | 6 | (1,6) | 7 |
| 2 | (2,1) | 3 | (2,2) | 4 | (2,3) | 5 | (2,4) | 6 | (2,5) | 7 | (2,6) | 8 |
| 3 | (3,1) | 4 | (3,2) | 5 | (3,3) | 6 | (3,4) | 7 | (3,5) | 8 | (3,6) | 9 |
| 4 | (4,1) | 5 | (4,2) | 6 | (4,3) | 7 | (4,4) | 8 | (4,5) | 9 | (4,6) | 10 |
| 5 | (5,1) | 6 | (5,2) | 7 | (5,3) | 8 | (5,4) | 9 | (5,5) | 10 | (5,6) | 11 |
| 6 | (6,1) | 7 | (6,2) | 8 | (6,3) | 9 | (6,4) | 10 | (6,5) | 11 | (6,6) | 12 |

Vemos que el espacio muestral es 6x6 =36 pares, notemos que diagonalmente se observan los resultados de las sumas que forman cada par y se identifica que el número 7 tiene mayores posibilidades de salir.

**Respuesta:** El 7 es el número que daría la mayor probabilidad de acertar.

**Solución 2**

Analizamos todos los posibles resultados que se pueden obtener al lanzar dos dados como se muestra en la siguiente tabla:

| Dado 1 | Dado 2 | Suma de los dos valores obtenidos |
|---|---|---|
| ⚀ | ⚀ | 2 |
| ⚀ | ⚁ | 3 |
| ⚀ | ⚂ | 4 |
| ⚀ | ⚃ | 5 |
| ⚀ | ⚄ | 6 |
| ⚀ | ⚅ | 7 |

| Dado 1 | Dado 2 | Suma de los dos valores obtenidos |
|---|---|---|
| ⚁ | ⚀ | 3 |
| ⚁ | ⚁ | 4 |
| ⚁ | ⚂ | 5 |
| ⚁ | ⚃ | 6 |
| ⚁ | ⚄ | 7 |
| ⚁ | ⚅ | 8 |

| Dado 1 | Dado 2 | Suma de los dos valores obtenidos |
|---|---|---|
| ⚂ | ⚀ | 4 |
| ⚂ | ⚁ | 5 |
| ⚂ | ⚂ | 6 |
| ⚂ | ⚃ | 7 |
| ⚂ | ⚄ | 8 |
| ⚂ | ⚅ | 9 |

| Dado 1 | Dado 2 | Suma de los dos valores obtenidos |
|---|---|---|
| ⚃ | ⚀ | 5 |
| ⚃ | ⚁ | 6 |
| ⚃ | ⚂ | 7 |
| ⚃ | ⚃ | 8 |
| ⚃ | ⚄ | 9 |
| ⚃ | ⚅ | 10 |

| Dado 1 | Dado 2 | Suma de los dos valores obtenidos |
|---|---|---|
| ⚄ | ⚀ | 6 |
| ⚄ | ⚁ | 7 |
| ⚄ | ⚂ | 8 |
| ⚄ | ⚃ | 9 |
| ⚄ | ⚄ | 10 |
| ⚄ | ⚅ | 11 |

| Dado 1 | Dado 2 | Suma de los dos valores obtenidos |
|---|---|---|
| ⚅ | ⚀ | 7 |
| ⚅ | ⚁ | 8 |
| ⚅ | ⚂ | 9 |
| ⚅ | ⚃ | 10 |
| ⚅ | ⚄ | 11 |
| ⚅ | ⚅ | 12 |

Vemos que el espacio muestral es 6x6 =36 y contamos la cantidad de veces que sale cada resultado. Así,

| Resultado de la suma | Cantidad de veces que ocurre el evento |
|---|---|
| 2 | 1 |
| 3 | 2 |
| 4 | 3 |
| 5 | 4 |
| 6 | 5 |
| 7 | **6** |
| 8 | 5 |
| 9 | 4 |
| 10 | 3 |
| 11 | 2 |
| 12 | 1 |

Notemos que el evento que ocurre más veces es en el que los valores de los dados sumen 7.

**Respuesta:** El 7 es el número que daría la mayor probabilidad de acertar.

**21.** "*Si trabajan en parejas, todas las filas quedan con la misma cantidad de estudiantes"*, esto significa que el número en cuestión sí es divisible por dos, es par y es múltiplo de 2.

Ahora, podemos enlistar los números pares del 2 al 35:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **2** | **4** | **6** | **8** | **10** | **12** | **14** | **16** | **18** | **20** |
| **22** | **24** | **26** | **28** | **30** | **32** | **34** | | | |

Luego, según la característica 1) vamos tachando los múltiplos de 5.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **2** | **4** | **6** | **8** | ~~**10**~~ | **12** | **14** | **16** | **18** | ~~**20**~~ |
| **22** | **24** | **26** | **28** | ~~**30**~~ | **32** | **34** | | | |

Seguidamente, de acuerdo con la característica 2) tachamos los múltiplos de 4.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **2** | ~~**4**~~ | **6** | ~~**8**~~ | ~~**10**~~ | ~~**12**~~ | **14** | ~~**16**~~ | **18** | ~~**20**~~ |
| **22** | ~~**24**~~ | **26** | ~~**28**~~ | ~~**30**~~ | ~~**32**~~ | **34** | | | |

Posteriormente, según la característica 3) descartamos los múltiplos de 3.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **2** | ~~**4**~~ | ~~**6**~~ | ~~**8**~~ | ~~**10**~~ | ~~**12**~~ | **14** | ~~**16**~~ | ~~**18**~~ | ~~**20**~~ |
| **22** | ~~**24**~~ | **26** | ~~**28**~~ | ~~**30**~~ | ~~**32**~~ | **34** | | | |

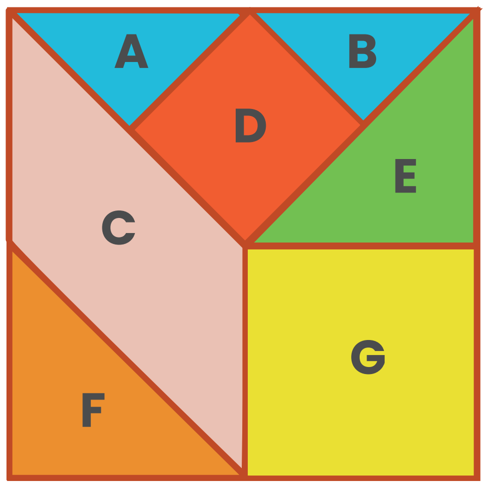
De esta manera, la lista de números se resume a 4.
Analicemos cada uno.

| | |
|---|---|
| **2** | Se descarta porque al trabajar en grupos de cinco no sobra 1. |
| **14** | Tampoco es el número buscado porque al dividir entre 5 no sobra 1, es decir, no cumple con la característica 1. |
| **22** | Se quita porque al dividir entre 5 no sobra 1 y al dividir entre 3 no sobran 2. |
| **26** | Es el número buscado porque cumple con todas las características. |

**Respuesta:** La sección 6-2 tiene 26 estudiantes.

# PROBLEMAS DE PRÁCTICA

**1.** Observe la imagen del siguiente Tangrama de Fletcher, en el cual un cuadrado de lado 8cm es dividido en cuatro triángulos rectángulos isósceles de dos tamaños distintos, dos cuadrados de distinto tamaño y un paralelogramo.

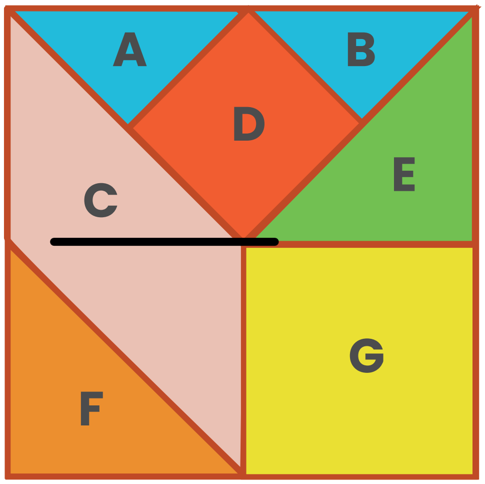



¿En cuál de las siguientes figuras su área equivale a $\frac{1}{4}$ del área de la figura C?

**a).** A*
**b).** D
**c).** F

**Solución**

Lo primero que se traza es una línea horizontal por la mitad del cuadrado más grade, de la siguiente manera:




Notemos que al sobreponer el triángulo F en el superior del paralelogramo C, se forman dos triángulos congruentes con el primero (F), ambos son isósceles.

**2.** A Carlos le regalaron para su cumpleaños una bolsa con dulces, el lunes se comió el 20% de los dulces, el martes comió lo mismo que el lunes y el miércoles por la mañana solo tenía 15 dulces.

¿Cuántos dulces le habían regalado a Carlos?

**Solución**

Carlos se comió el mismo porcentaje de dulces el Lunes y el Martes, quiere decir que entre esos dos días consumió el 40% (20%+20%) del 100%, por lo que la cantidad de confites que le quedaron para el Miércoles representa el 60% (100-40 =60).

Para calcular la totalidad de confites inicial, se utiliza regla de tres como se muestra a continuación:

| | | |
|---|---|---|
| Confites | 15 | **?** |
| Porcentajes | 60 | 100 |

Así, se resuelve la operación 15 x 100 ÷ 60 = 25

**Respuesta:** A Carlos le habían regalado 25 confites.

**3.** Marta construye la siguiente imagen, en la que el cuadrado naranja inicial lo transforma cada vez en un cuadrado más pequeño, siguiendo el patrón que se observa en la imagen. Si el perímetro del cuadrado naranja inicial es 4cm.

¿Cuánto mide el lado del cuadrado naranja en la figura 6?

**Solución**

Como el perímetro del cuadrado mide 4cm y este se obtiene al sumar cada uno de sus lados congruentes, entonces se dice que la medida del lado en la Figura 1 es 1 cm.

Según se observa en la secuencia de figuras, Marta va disminuyendo la medida del lado del cuadrado a la mitad de la anterior, por lo que el patrón se obtiene dividiendo por dos. Veámoslo:

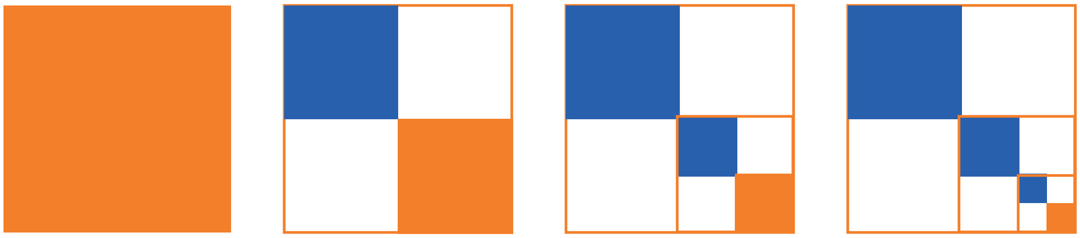


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

¿Cuánto mide el lado del cuadrado naranja en la figura 6?

## Solución

Como el perímetro del cuadrado mide 4cm y este se obtiene al sumar cada uno de sus lados congruentes, entonces se dice que la medida del lado en la Figura 1 es 1 cm.

Según se observa en la secuencia de figuras, Marta va disminuyendo la medida del lado del cuadrado a la mitad de la anterior, por lo que el patrón se obtiene dividiendo por dos. Veámoslo:


Figura 1

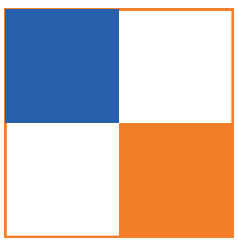


Figura 2

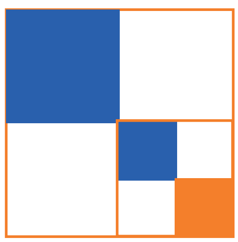


Figura 3

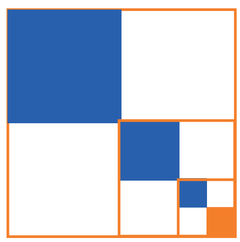


Figura 4

$\int = 1$

$\int = \frac{1}{1} \div \frac{2}{1} = \frac{1}{2}$

$\int = \frac{1}{2} \div \frac{2}{1} = \frac{1}{4}$

$\int = \frac{1}{4} \div \frac{2}{1} = \frac{1}{8}$

De esta manera, se puede calcular la medida del lado de las figuras 5 y 6.

**Figura 5**

$\int = \frac{1}{8} \div \frac{2}{1} = \frac{1}{16}$

**Figura 6**

$\int = \frac{1}{16} \div \frac{2}{1} = \frac{1}{32}$

**Respuesta:** El lado del cuadrado naranja de la figura 6 mide $\frac{1}{32}$ cm.

**4.** Miguel debe resolver el siguiente crucigrama de fracciones:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{4}$ | + | | = | 1 |
| − | | − | | |
| | x | | = | ★ |
| = | | = | | |
| $\frac{1}{8}$ | | $\frac{1}{4}$ | | |

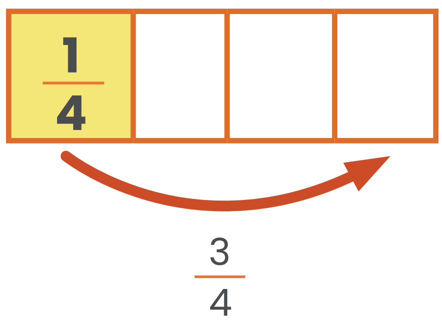
¿Cuál será el valor que debe ir en el espacio señalado con ★ ?

**Solución**

El crucigrama anterior contiene cuatro ejercicios: dos verticales y dos horizontales. Iremos resolviendo uno a uno.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{4}$ | + | | = | 1 |

En este caso, nos preguntamos ¿cuánto le falta a $\frac{1}{14}$ para formar la unidad? Como el denominador indica 4, significa que la unidad está partida en 4 y se toma 1 pieza según la cantidad del numerador, por tanto $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$




Luego resolvemos:

$$\frac{3}{4} - \boxed{\phantom{0}} = \frac{1}{4}$$

Analizamos cuánto se le resta a $\frac{3}{4}$ para obtener $\frac{1}{4}$, como son fracciones homogéneas mentalmente se encuentra la respuesta: $\frac{2}{4}$ .

Seguidamente resolvemos la siguiente operación:

| |
|---|
| $\frac{1}{4}$ |
| $-$ |
| |
| $=$ |
| $\frac{1}{8}$ |

Notamos que la operación está formada por fracciones heterogéneas, lo primero que debemos hacer es homogenizarlas, así buscamos un número que al multiplicarlo por 4 nos de 8, este es 2, formamos la unidad $\frac{2}{2}$ según el procedimiento de amplificación.

$\frac{1}{4} \times \frac{2}{2} = \frac{2}{8}$ Así, 1 es equivalente a $\frac{2}{8}$ . De esta manera, podemos continuar resolviendo la operación indicada en el crucigrama:

| |
|---|
| $\frac{2}{8}$ |
| $-$ |
| |
| $=$ |
| $\frac{1}{8}$ |

Para esto nos preguntamos ¿cuál valor le restamos a $\frac{2}{8}$ para obtener a $\frac{1}{8}$? La respuesta sería $\frac{1}{8}$

Por último, realizamos la operación $\frac{1}{8} \times \frac{2}{4} = \frac{2}{32}$, notemos que este resultado no está simplificado por lo que dividimos arriba y abajo por 2 y obtenemos:

$$\frac{2}{32} \div \frac{2}{2} = \frac{1}{16}$$

**Respuesta:** El valor que se debe ubicar en vez de ★ es $\frac{1}{16}$.

**5.** Lucía tiene 36 años de edad, $\frac{5}{6}$ partes de esos años los ha dedicado a estudiar música. De los años dedicados a la música, $\frac{1}{3}$ partes del tiempo lo ha dedicado a tocar el piano. ¿Cuántos años de su vida, los ha dedicado Lucía a tocar el piano?

De los 36 años hay que tomar $\frac{5}{6}$, por lo tanto vamos a dividir los treinta y seis años en seis partes cada una con el mismo valor (según lo indica el denominador):

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |

Según se indica en el numerador debemos tomar 5 de estas partes, como se muestra seguidamente:

$$\underbrace{6\quad 6\quad 6\quad 6\quad 6}_{6\ \bullet\ 5\ =\ 30}\quad 6$$

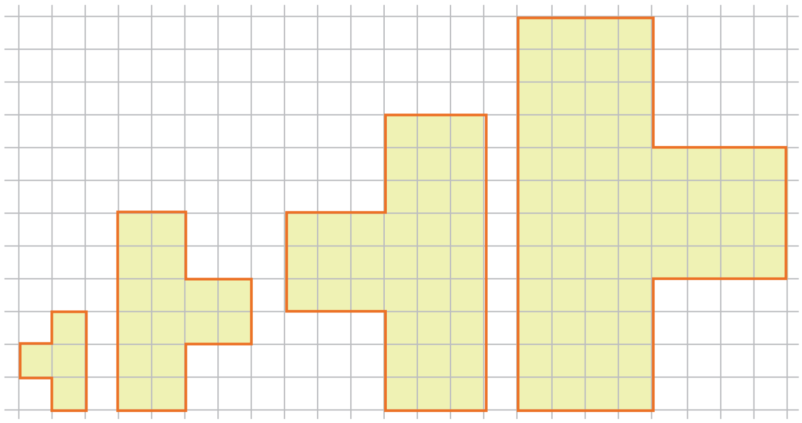
De acuerdo a lo anterior Lucía ha estudiado música 30 años, además a ello, en el problema nos piden que se determine cuantos años de esos treinta a dedicaco a tocar piano, lo cual corresponde a $\frac{1}{3}$ de este último tiempo.

Por lo que debemos dividir los 30 años en partes iguales como se muestra:

Vamos a considerar de los treinta años (tiempo dedicado a estudiar música) un $\frac{1}{3}$, por lo tanto:


De acuerdo con lo anterior, Lucía ha dedicado 10 años de su vida en estudiar el piano.

**6.** Observe la siguiente sucesión de figuras, en la cual se muestran las primeras cuatro figuras:



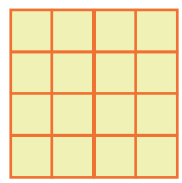
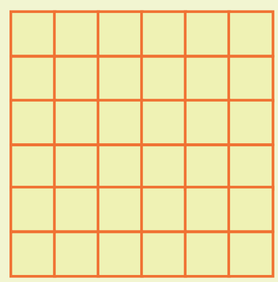
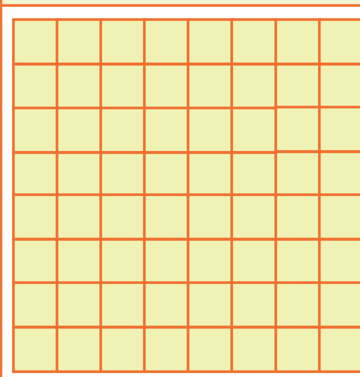

Tenga presente que cada cuadrito de la cuadrícula corresponde a una unidad cuadrada de área.

Si se sabe que la sucesión continúa con el mismo patrón entonces complete la tabla con las áreas de las figuras 4 y 6. Luego determine un patrón que le permita calcular el área de la figura 20.

| Figura # | Área de la figura en unidades cuadradas | Explique o escriba el patrón que le permite calcular el área de cualquier figura |
|---|---|---|
| 1 | 4 | |
| 2 | 16 | |
| 3 | 36 | |
| 4 | | |
| 5 | 100 | |
| 6 | | |

Aplique el patrón para determinar el área de la figura 20.

Analicemos los valores de las áreas de las figuras de la sucesión:

| Figura # | Área de la figura en unidades cuadradas | Imagen de otra manera | Observación |
|---|---|---|---|
| **1** | 4 | | 2 x 2 = 4 |
| **2** | 16 |  | 4 x 4 = 16 |
| **3** | 36 |  | 6 x 6 =36 |
| **4** | |  | 8 x 8 = 64 |
| **5** | 100 | | 10 x 10 = 100 |
| **6** | | | 12 x 12 = 144 |

Las figuras de la sucesión se observan formas diferentes a las imágenes de la tabla de la izquierda, pero en ambas se mantiene el mismo número de cuadrados que se utilizaron para la elaboración de las figuras originales.

Sin embargo, al pasarlas a esta representación, se evidencia de manera más sencilla el patrón de incremento de dos unidades cuadradas entre una y otra.

Además, las áreas de cada figura se encuentran representadas por cuadrados perfectos, por lo que se podría pasar de una representación gráfica a una simbólica para simplificar la manipulación de la información, como se muestran seguidamente:

$$2^2, \; 4^2, \; 6^2, \; 8^2, \; 10^2, \; 12^2, \; 14^2, \ldots$$

Inician con el 2 x 2 = 4 y van aumenta en 2 unidades el siguiente término.

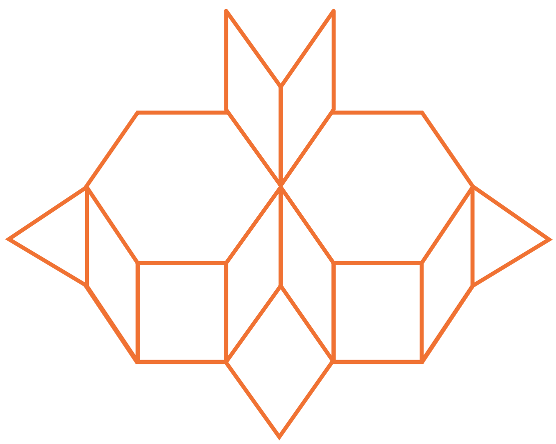
Si desarrollamos las potencias anteriores los valores de las áreas en unidades cuadradas para las diferentes figuras sería:

$$4, 16, 32, 64, 100, 144, 196 \ldots$$

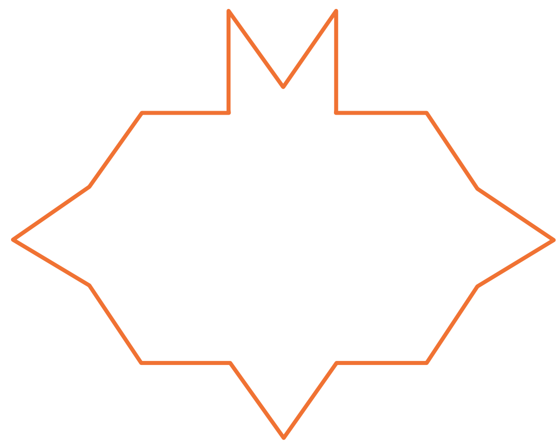
De acuerdo con lo anterior, el valor de las áreas en unidades cuadradas de la figura 4 sería el cuadrado perfecto de 8, que es 64 y el de la figura en la posición 6 es de 144 unidades cuadradas.

**7.** Andrés construyó una figura compuesta por dos cuadrados, siete rombos, dos triángulos equiláteros y dos hexágonos regulares idénticos. A partir de esa figura, Andrés borró unas líneas y construyó una segunda figura como se muestra en la siguiente imagen:

Figura original



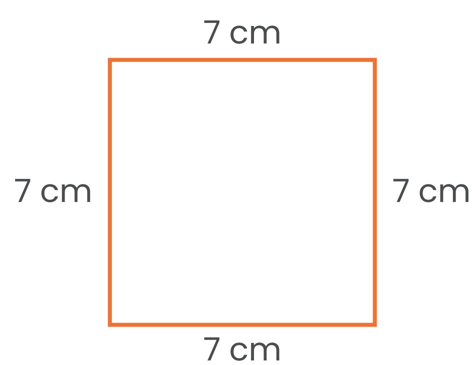
Segunda figura



Si en la figura original el perímetro del hexágono regular es de 24 cm, entonces el perímetro de la segunda figura corresponde en centímetros a:

**Recuerde que:**

El perímetro de una figura geométrica es la suma de la longitud de todos sus lados



En este caso el perímetro sería: $P = 7 + 7 + 7 + 7 = 28$ cm

También podemos decir que

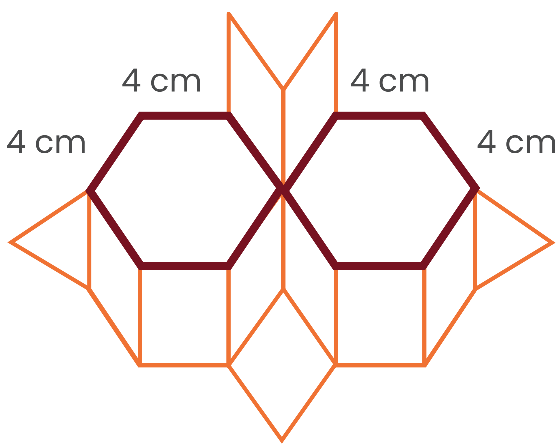
$P = 4 \times \int$ donde $\int$ es la cantidad de lados
$P = 4 \cdot 7$
$P = 28$ cm

Al indicarnos que el perímetro del hexágono es de 24 cm, podemos concluir que:

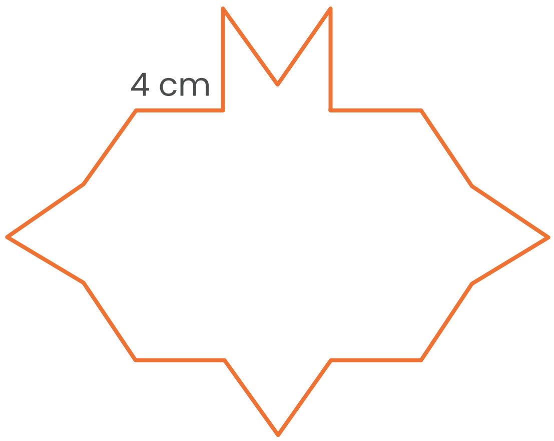
$P = 6 \cdot \int$ donde $\int$ es la cantidad de lados
$24 = 6 \cdot \int$ ¿Qué número multiplicado por 6 da como resultado 24?

En la tabla del seis solo $6 \cdot 4 = 24$

De acuerdo con lo anterior tenemos que en:
$P = 6 \cdot 4$
$P = 24$ cm por lo tanto, cada lado de los hexágonos mide 4 cm como se muestra:



Sin embargo, podemos concluir que los otros lados de la figura también tienen esa misma media por las propiedades de las figuras geométricas que conforman la figura final, marcaremos con rojo los segmentos con medida 4 cm: dos cuadrados, siete rombos, dos triángulos equiláteros y dos hexágonos regulares idénticos.




En la figura anterior solo se marcó uno de los lados de la figura, sin embargo, todos sus lados tienen la misma medida.

De acuerdo a lo anterior laimagen tiene 18 lados, y cada uno de estos mide 4 cm, por lo tanto:

**18 x 4 cm = 72 cm**

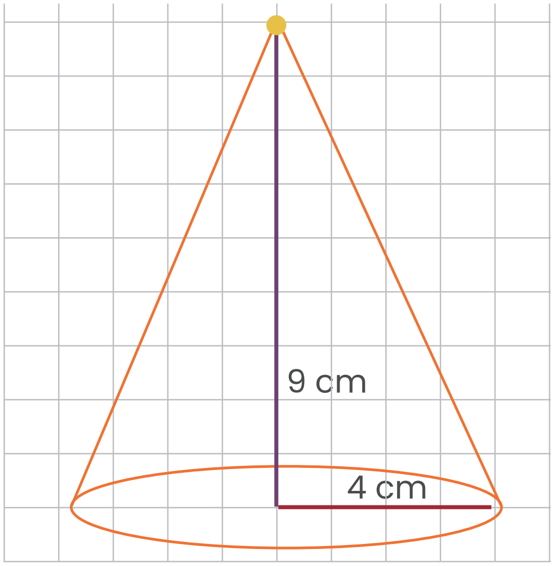
El perímetro de la figura es de 72 cm.

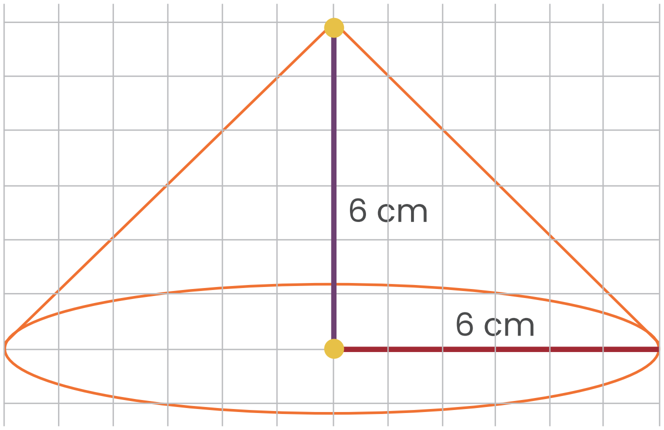
**8.** En la sala de reuniones de mi escuela hay conos de cartón de tamaños distintos que se utilizan para tomar agua.

- El radio de la base de uno de los conos mide 4 cm y la altura 9 cm.
- En el otro cono, el radio de la base es de 6 cm y su altura también es de 6 cm.

Con base en esta información, ¿cuál es la razón de los volúmenes, en centímetros cúbicos, del cono de mayor volumen y el cono de menos volumen?

De acuerdo con la información suministrada, tenemos dos tipos de conos de cartón para tomar agua, como se muestra seguidamente.

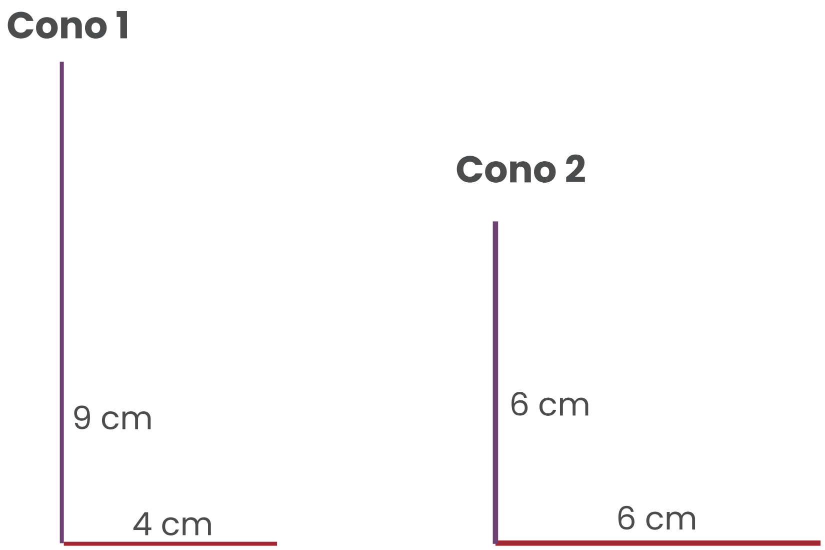



Las imágenes anteriores cumplen con las especificaciones indicadas para el radio (color rojo) y la altura (color morado) establecidas en el problema, de acuerdo con esto podemos realizar dos posibles rutas para dar solución a la interrogante planteada:

**Caso 1**

Consideremos los radios y las alturas y realicemos una comparación entre ellos.




Con esta información podemos afirmar que:

Razón de las alturas $\frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

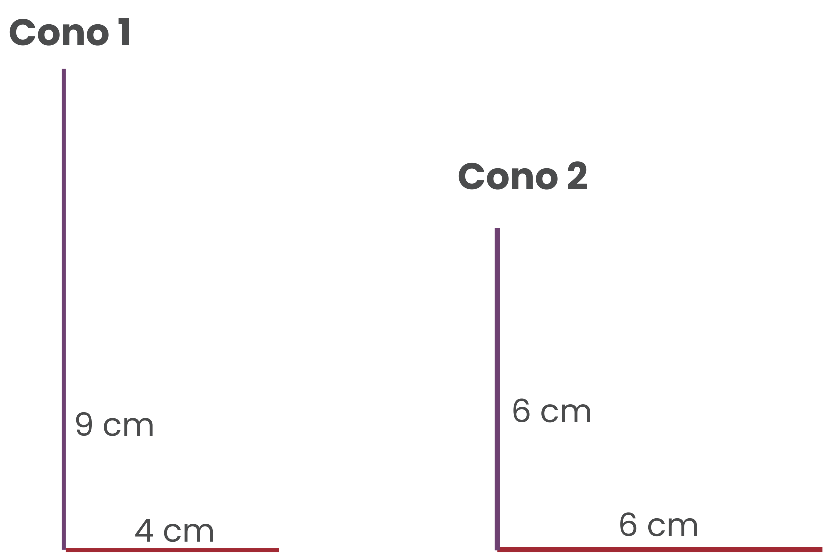
Razón de las alturas $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

**Recuerde que:** la expresión $\frac{9}{6}$ y $\frac{3}{2}$ es necesario simplificarla para lograr obtener la fracción $\frac{3}{2}$

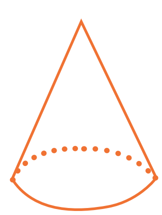
Con lo anterior, a la pregunta "¿cuál es la razón de los volúmenes, en centímetros cúbicos, del cono de mayor volumen y el cono de menor volumen?" podemos afirmar que la razón de los volúmenes de cono mayor volumen y el de menor columen es de $\frac{3}{2}$.

**Caso 2**

Otra manera puede ser obteniendo en ambos casos el columen de cada cuerpo sólido, siendo necesario utilizar la información comparada en el caso 1, como se muestra seguidamente:




**Recuerde que:** para calcular el volumen de un cono utilizamos la siguiente fórmula:



$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

Volume cono 1:

$V_1 = \dfrac{3{,}14 \cdot 4^2 \cdot 9}{3}$ $\qquad V_1 = \dfrac{\dfrac{11304}{25}}{\dfrac{3}{1}}$ $\qquad V_1 = \dfrac{3768}{25}$

**Recuerde que:** para realizar una fracción como la de la izquierda debemos:

Volume cono 1:

$V = \dfrac{\dfrac{11304}{25}}{\dfrac{3}{1}}$

Multiplicar extremos por extremos y medios por medios para obtener la siguiente fracción:

$V = \dfrac{3768}{25}$

Volume cono 2:

$V_2 = \dfrac{3{,}14 \cdot 6^2 \cdot 6}{3}$ $\qquad V_2 = \dfrac{\dfrac{16956}{25}}{\dfrac{3}{1}}$ $\qquad V_2 = \dfrac{5652}{25}$

Ahora vamos a realizar la comparación entre los volúmenes:

$V_1 = \dfrac{3768}{25}$ $\qquad V_2 = \dfrac{5652}{25}$

Ahora vamos a realizar la comparación entre los volúmenes:

$V_1 = \frac{3768}{25}$ $\quad\quad$ $V_2 = \frac{5652}{25}$

Razón entre volúmenes

Razón entre volúmenes $\quad\quad$ Multiplicar extremos por

$$\frac{V_1}{V_2} \quad\quad \frac{\frac{3768}{25}}{\frac{5652}{25}}$$

$$\text{Razón entre volúmenes} = \frac{\frac{3768}{25}}{\frac{5652}{25}}$$

$$\text{Razón entre volúmenes} = \frac{3}{2}$$

De la misma manera que comparamos sus radios y alturas, si la realizamos entre sus volúmenes, la razón entre sus volúmenes es de $\frac{3}{2}$.

**9.** El euro (€) es la moneda usada por una serie de países de la Unión Europea. El tipo de cambio del euro en colones puede ser calculado por la siguiente relación matemática: C = n x €, donde "C" representa la cantidad de colones, "n" representa la cantidad de euros y "€" representa el precio en colones de cada euro. Si el 31 de julio de 2017 el Banco Central de Costa Rica registró la compra de cada euro en ₡ 656,57, entonces ¿cuántos colones recibió un turista que necesitó cambiar €300?

En la información anterior se establece que:

• El tipo de cambio del euro en colones puede ser calculado por la siguiente relación matemática: C = n x €, donde "C" respresenta la cantidad de colones, "n" representa la cantidad de euros y "€" representa el precio en colones de cada euro.

• "Si el 31 de julio de 2017 el Banco Central de Costa Rica registró la compra de cada euro en ₡ 656,57 y un turista que necesitó cambiar € 300"

Vamos a tomar la expresión matemática C = n x € para calcular la cantidad de colones que recibió el turista.

El valor de n para este caso sería € 300 y el precio en colones de cada "€" es de ₡ 656,57, por lo tanto.

C = n x €
C = ₡ 656,57 x € 300
C = ₡ 196 971

El turista recibió ₡ 196 971 de acuerdo con el tipo de cambio ese día.

**10.** La sucesión de números $\frac{1}{4}, \frac{4}{9}, \frac{9}{16}, \frac{16}{25}, \ldots$se forma siguiendo una regla patrón. ¿Cuál es el término que se encuentra en la décima posición?

Sistematicemos la información de la sucesión anterior en una tabla como se muestra seguidamente:

| Posición | Valor numerador | Valor del denominador |
|---|---|---|
| **1** | 1 | 4 |
| **2** | 4 | 9 |
| **3** | 9 | 16 |
| **4** | 16 | 25 |
| **5** | | |
| **6** | | |

Como se observa el valor de los términos tanto para el numerador, como para el denominador, corresponden a un número multiplicado por su mismo en el caso de los numeradores, sin embargo, para los denominadores el proceso sufre una variación, como se muestra en la siguiente tabla:

| Posición | Valor numerador | Valor del denominador |
|---|---|---|
| **1** | $1 \times 1 = 1$ | $(1 + 1)^2 = 4$ |
| **2** | $2 \times 2 = 4$ | $(1 + 2)^2 = 9$ |
| **3** | $3 \times 3 = 9$ | $(1 + 3)^2 = 16$ |
| **4** | $4 \times 4 = 16$ | $(1 + 4)^2 = 25$ |
| **5** | $5 \times 5 = 25$ | $(1 + 5)^2 = 36$ |
| **6** | $6 \times 6 = 36$ | $(1 + 6)^2 = 49$ |

Para el caso del numerador, se observa que el número coincide con la posición, por tal razón para el término en la decima posición corresponde al número 10, por lo tanto, el valor del numerador de esta fracción en la posición número 10 sería: 10 • 10 o bien $10^2$ en ambos casos el valor obtenido es 100.

Para los denominadores los valores difieren a los del numerador en una unidad más, y este valor lo multiplicamos por sí mismo, por lo tanto para la décima posición sería 10 + 1 = 11 y este número lo multiplicamos por mismo 11 • 11 o bien $11^2$ que corresponde al número 121.

Según lo anterior, la fracción que se ubica en la posición diez sería : $\frac{100}{121}$

**Recuerde que** una manera más sencilla para determinar los valores de cualquier sucesión es obtener el término general o la ley de formación.

En este caso en particular podemos considerar lo siguiente:

| Posición | Valor numerador | Valor del denominador |
|---|---|---|
| **1** | 1 x 1 = 1 | $(1 + 1)^2 = 4$ |
| **2** | 2 x 2 = 4 | $(1 + 2)^2 = 9$ |
| **3** | 3 x 3 = 9 | $(1 + 3)^2 = 16$ |
| **4** | 4 x 4 = 16 | $(1 + 4)^2 = 25$ |
| **5** | 5 x 5 = 25 | $(1 + 5)^2 = 36$ |
| **6** | 6 x 6 = 36 | $(1 + 6)^2 = 49$ |

En el caso del numerador como se indicó anteriormente corresponde a la posición multiplicada por si misma por lo tanto una manera general de expresarla sería:

n = posición $n^2$ con esta expresión podemos determinar cualquier valor que corresponda al numerador.

En el caso del denominador a la posición que es "n" se aumenta en una unidad y de la misma manera se eleva al cuadrado, de esta manera la expresión que permite modelar cualquier valor que deba ocupar el denominador sería:

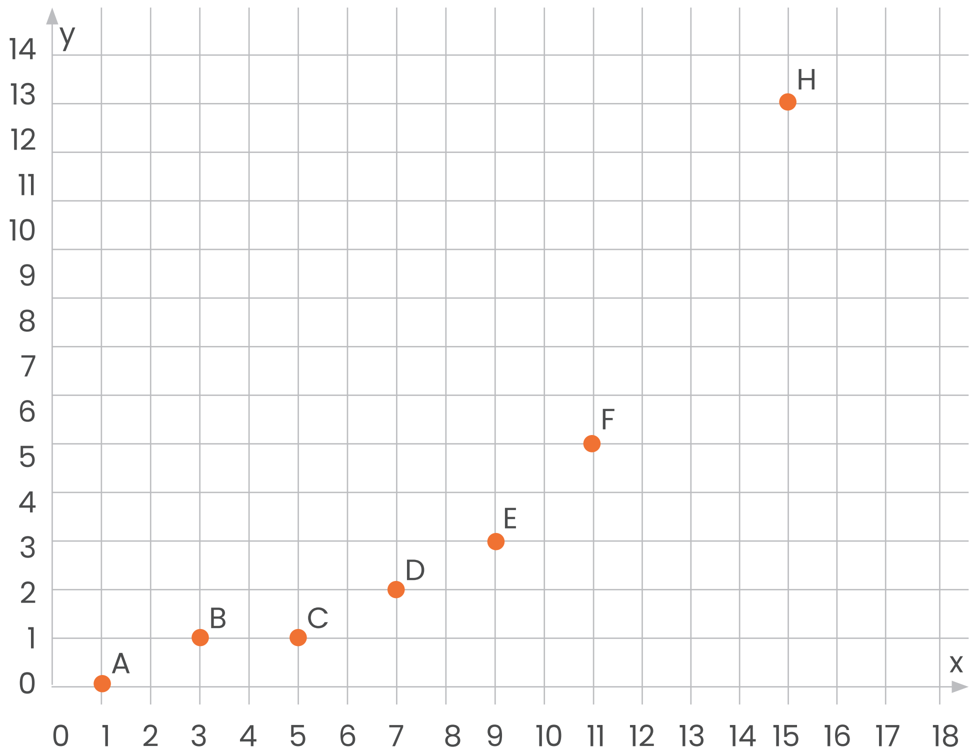
n = posición $(1 + n)^2$

Ellas juntas en su respectiva posición, permiten obtener cualquier valor que deba adquirir la fracción según la posición interesada, quedando de la siguiente manera:

n = posición $\dfrac{n^2}{(1 + n)^2}$

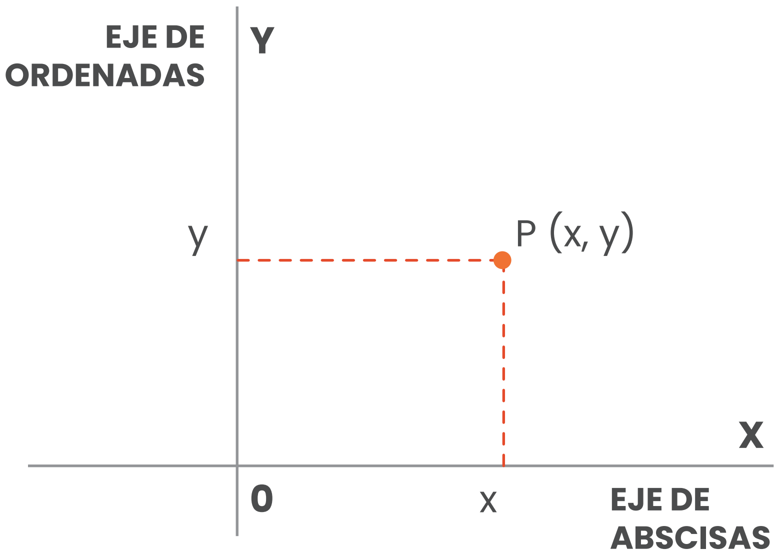
Con la expresión anterior calculamos los términos deseados.

**11.** Observe la siguiente representación de puntos en el plano cartesiano




En ella deberían aparecer ocho puntos: A, B, C, D, E, F, G, H pero el punto G no aparece representado. Si se sabe que las abscisas de todos esos puntos siguen un patrón y las ordenadas de todos esos puntos siguen otro patrón, entonces ¿Cuál es el par ordenado que representa al punto G?

**Recuerde que** en un plano cartesiano las ordenadas se localizan en el eje "y" y las abscisas en el "x".




**Recuerde:** los pares ordenados los identificamos como un punto.

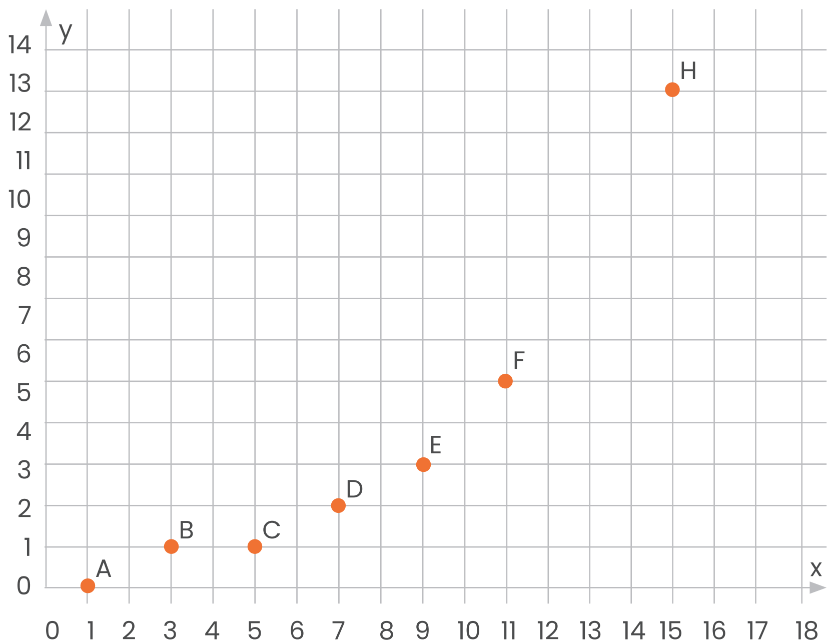
Con los valores de "x" y "y" podemos formar pares ordenados. Recordenomos que los pares ordenados son puntos en el plano formados por la componente "x" y la componente "y" relacionada.

Identificación del punto ← **H (x, y)**

Coordenada en el eje x

Coordenada en el eje y

Lo primero que vamos a determinar son los valores para cada uno de los puntos representados en el plano cartesiano siguiente:




Los valores de los componentes de los puntos son:

A (1, 0) B (3, 1)
C (5, 1) D (7, 2)
E (9, 3) F (11, 5)
G (_, _) H (15, 13)

Con estos puntos completemos una tabla donde visualicemos de una manera más sencilla los elementos de cada coordenada para determinar el patrón presente en ella:

| **Coordenada** | **Punto** | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | A | B | C | D | E | F | G | H |
| **X** | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | | 15 |
| **Y** | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | | 13 |

Analicemos cada coordenada por separado:

Coordenada "X"

| Coordenada | Punto | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | A | B | C | D | E | F | G | H |
| **X** | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | | 15 |

+2 +2 +2 +2 +2

El incremento entre cada término es de dos unidades, por lo tanto, el valor del componente "x" en el punto G sería 11 + 2 = 13

Coordenada "Y"

| Coordenada | Punto | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | A | B | C | D | E | F | G | H |
| **Y** | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | | 13 |

En este caso no se evidencia un incremento como en el caso de las abscisas, sin embargo, si se puede observar lo siguiente:

En este caso no se evidencia un incremento como en el caso de las abscisas, sin embargo, si se puede observar lo siguiente:

Para obtener los valores a partir del valor de la ordenada en el punto D corresponde a la suma de los dos anteriores como se muestra en la siguiente tabla:

| Valor en Y | Proceso |
|---|---|
| 0 | |
| 1 | |
| 1 | 1 + 1 = 2 |
| 2 | 2 + 1 = 3 |
| 3 | 3 + 2 = 5 |
| 5 | 5 + 3 = 8 |
| | 8 + 5 = 13 |
| 13 | |

De acuerdo a lo anterior de componente "y" en el punto G sería 8, por lo tanto, las coordenadas completas serían:

**G (13, 8)**

**12.** La siguiente Ley de Formación $a_n = \dfrac{(n - 1)(n + 1)}{n}$ permite construir la sucesión representada en la tabla.

¿Cuál es número que representa el noveno término de esa sucesión?

De acuerdo con la información presente en la tabla podemos afirmar que en la Ley de Formación $a_n = \dfrac{(n - 1)(n + 1)}{n}$, ***n*** representa el valor de la posición del término, por lo tanto, al asignar a esra letra el valor de 3 (tercera posición) y sustituirlo en la ler de formación obtenemos lo siguiente:

$$a_n = \frac{(3 - 1)(3 + 1)}{3}$$

$$a_n = \frac{(2)(4)}{3}$$

$$a_n = \frac{8}{3}$$

Sustituimos en la ley de formación el valor de *n* por el número 3

**Recuerde que** entre dos paréntesis si no aparece nada la operación aritmética que debemos efectuar es una multiplicación.

De acuerdo con lo anterior podemos realizar el mismo procedimiento para calcular el valor del término en la posición 9, considerando ***n = 9***

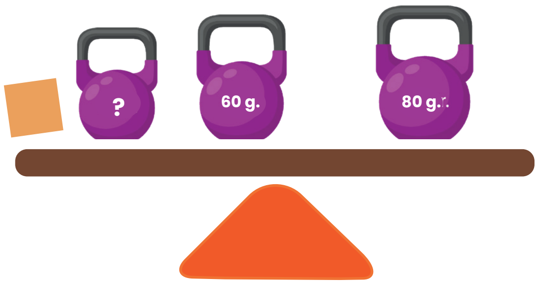
$$a_n = \frac{(9 - 1)(9 + 1)}{3}$$

$$a_n = \frac{(8)(10)}{3}$$

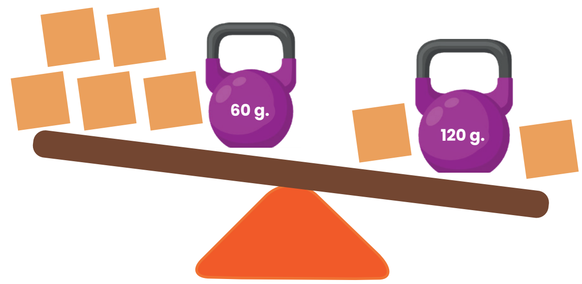
$$a_n = \frac{80}{3}$$

Por lo tanto, el valor del término en la posición 9 sería $a_n = \dfrac{80}{3}$

**13.** Observe las siguientes balanzas una en equilibrio y la otra en desequilibrio




Balanza 1



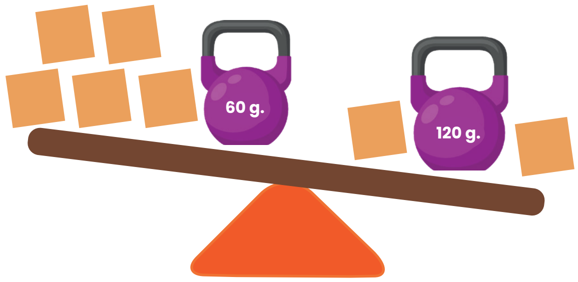

Balanza 2

Si todos los cuadrados rayados pesan lo mismo; y se presentan cuatro pesas (tres con sus respectivos pesos en gramos y otra en la cual se desconoce su peso).

Con base en la información anterior, el peso que debe tener 

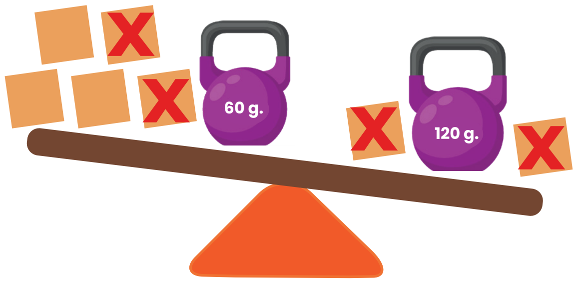
para que la balanza 1 se mantenga en equilibrio debe ser:

Consideremos la "Balanaza 2" inicialmente



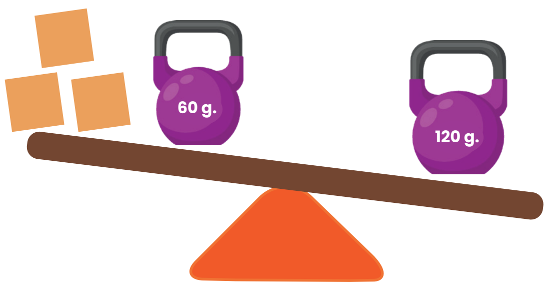

Balanza 2

En ella podemos ir quitando a ambos lados la misma cantodad o peso, observemos la siguiente cancelación.



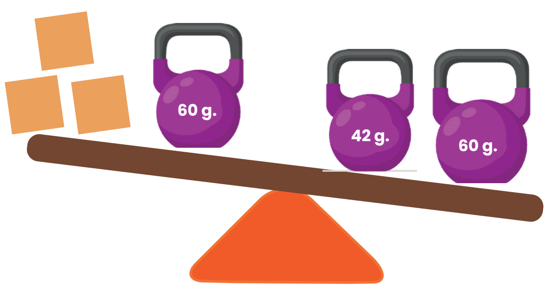

Balanza 2

Quedando la siguiete expresión, la cual mantiene la desigualdad existente.



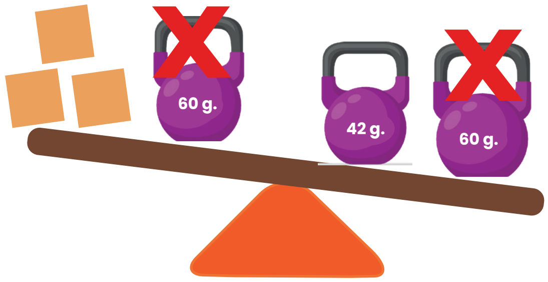

Balanza 2

Ahora realicemos una decomposición de los pesos que quedan para poder seguir aplicando la misma cancelación con pesos iguales entre sí:



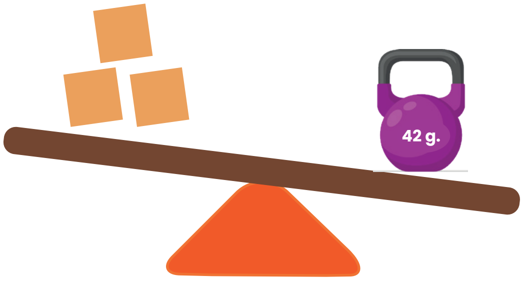

Balanza 2

De acuerdo con esta descomposición podemos cancelar:




Balanza 2

Quedando como valores desconocidos los siguientes:

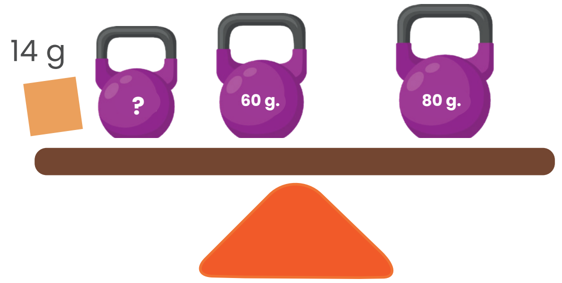



Balanza 2

De acuerdo con lo anterior podemos dividir el 42 g entre los tres cuadrados, esto debido a que en el inicio del problema se indica que cada cuadrado persa lo mismo.

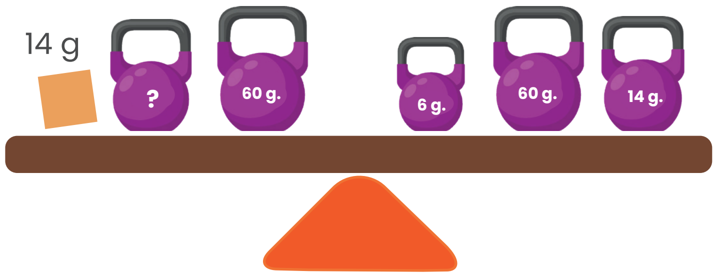
$$42 \div 3 = 14\ g$$

Considerando la información anterior, podemos afirmar que si cada cuadrado pesa 14 g, entonces vamos a sustituir:



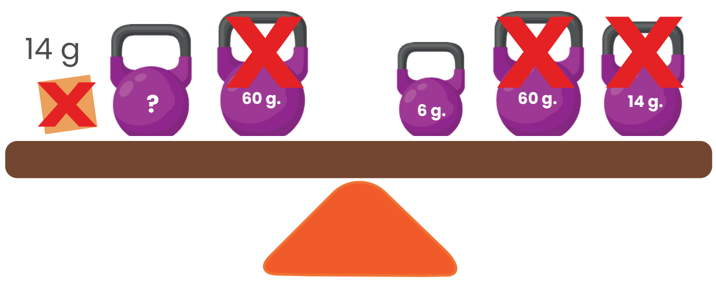

Balanza 1

Ahora descomponemos las otras cantidades,




Balanza 1

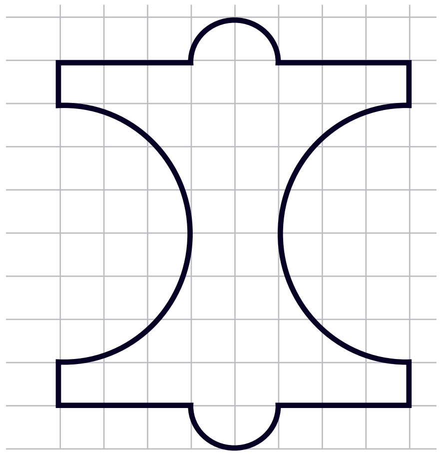
Vamos a cancelar a ambos lados de la balanza los pesos que se pueda y no provoque un desequilibrio de esa balanza.




Balanza 1

Según la información anterior el peso que debe corresponder al  para que la balanza se mantenga equilibrada debe ser 6 g.

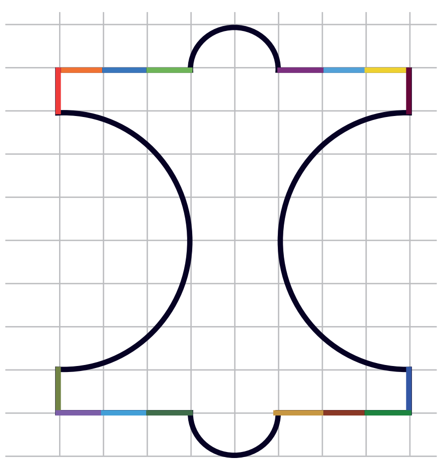
**14.** Observe la figura dibujada en la siguiente cuadrícula, en la que cada cuadrito mide 1 cm de lado.



Si se sabe que la figura está formada por semicircunferencias, segmentos horizontales y verticales, entonces:

**a.** ¿Cuál es la longitud, en centímetros, de la figura?
**b.** ¿Cuál es el área, en centímetros cuadrados, de dicha figura?

Lo primero a considerar es que cada cuadrito mide 1 cm de lado, lo que nos va a permitir determinar la longitud en centímetros de la figura, como se muestra seguidamente:

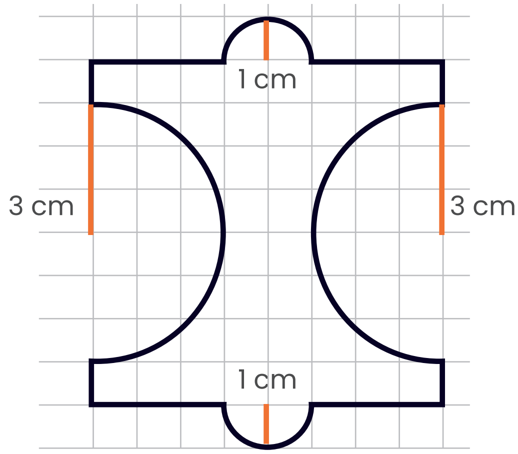


De esta manera podemos contabilizar 16 espacios cada uno con la medida de 1 cm, por lo tanto, esta parte tiene una longitud de 16 cm.

En la imagen se muestra algunas semicurferencias, en las cuales podemos calcular su longitud de la siguiente manera:

$$\frac{L}{2} = \frac{2\pi r}{2}$$

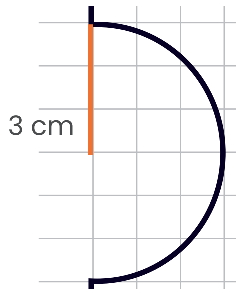
En el caso de las semicircunferencias grandes el radio vale 3 cm y en las pequeñas 1 cm, consideremos las siguientes situaciones:




**Recuerde que** hay dos semicircunferencias, que tienen el mismo radio como se observa en la imagen de la izquierda.

Consideremos para efectos de cálculo de $\pi$ = 3,14

Semicircunferencias grandes



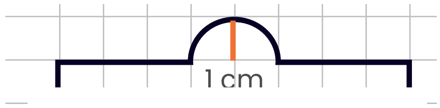

$$L_{sc} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 3}{2}$$

$$L_{sc} = \frac{9{,}42}{2}$$

Longitud de las dos semicircunferencias grandes

$$2L_{sc} = 9{,}42 \text{ cm} \cdot 2$$
$$2L_{sc} = 18{,}84 \text{ cm}$$

Semicircunferencias pequeñas




Longitud de las dos semicircunferencias pequeñas

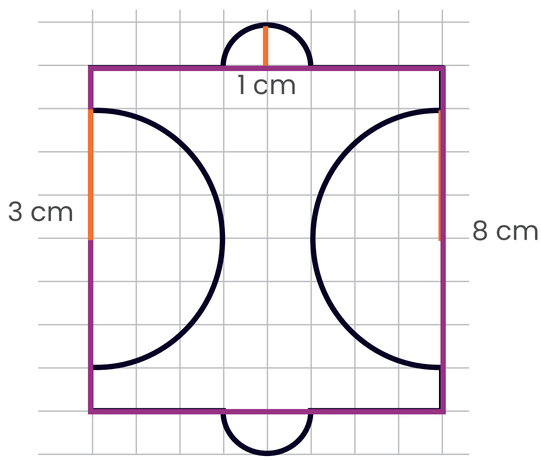
$$2L_{sc} = 3{,}14 \text{ cm} \cdot 2$$
$$2L_{sc} = 6{,}28 \text{ cm}$$

De acuerdo con lo anterior a la pregunta "¿Cuál es la longitud, en centímetros, de la figura?. Debemos sumar todos los resultados anteriores: Longitud figura: 16 cm + 18,84 cm + 6,28 cm.

**Longitud figura: 41,12 cm**

Para el caso del área de la figura podemos realizarla de varias maneras:

Calculemos todo el cuadro y quitemos la correspondiente a las semicircunferencias:




La figura resaltada con morado corresponde aun cuadrado y su área sería ($A_c$):

$$A_c = \int^{2}$$
$$A_c = 8^{2}$$
$$A_c = 64\ \text{cm}^2$$

Área de los semicículos grandes ($A_{c\,g}$)

$$A_{c\,g} = \frac{\pi r^2}{2}$$

$$A_{c\,g} = \frac{3{,}14 \cdot 3^2}{2}$$

$A_{c\,g}$ = 14, 13 cm², el área de los dos semicírculos es $2A_{c\,p}$ = 3,14 cm²

Área de la figura ($A_f$):

$A_f = A_c - A_{c\,g} + A_{c\,p}$

$A_f = 64\ cm^2 - 28{,}26\ cm^2 + 3{,}14\ cm^2$

$A_f = 38{,}88\ cm^2$

**El área de la figura sería 38,88 cm²**

| $n$ | $a_n$ |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 2 | $\frac{3}{2}$ |
| 3 | $\frac{8}{3}$ |
| $\vdots$ | |
| 9 | |

**15.** Resuelva la siguiente situación:
Los números BR son todos aquellos números naturales, mayores que 10 pero menores que 1000, que son divisibles por:

**a.** Cada una de sus cifras
**b.** Por la suma de todas sus cifras
**c.** Por el producto de todas sus cifras
**d.** Además, en el caso de los números de tres cifras, son divisibles, por todos los productos posibles, utilizando dos de sus cifras.

Por ejemplo 735 es un número BR porque:
**a.** Es divisible por 7, por 3 y por 5 (cada una de sus cifras)
**b.** Es divisible por 15 (la suma de todas sus cifras)
**c.** Es divisible por 105 (el producto de todas sus cifras}
**d.** Es divisible por 21 (el producto de 7 y 3), es divisible por 35 (el producto de 7 y 5) y es divisible por 15 (el producto de 3 y 5)

Determine, ¿cuáles, cuadrados perfectos y cubos perfectos, menores que 220 son números BR?

Primero vamos a determinar los cuadros y cubos perfectos menores que 220.

| Cuadrador perfectos | Cubos perfectos |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 4 | 8 |
| 16 | 27 |
| 25 | 64 |
| 36 | 125 |
| 49 | 216 |
| 64 | |
| 81 | |
| 100 | |
| 144 | |
| 169 | |
| 196 | |

En la tabla de la izquierda se observa los números que son menos que 220 y que también son cubos y cuadrados perfecto.

Ahora a esos números apliquemosle otra condición que es: "Los números BR son todos aquellos números naturales, **mayores que 10** pero menores que 1000".

| Cuadrador perfectos | Cubos perfectos |
|---|---|
| | |
| | |
| 16 | 27 |
| 25 | 64 |
| 36 | 125 |
| 49 | 216 |
| 64 | |
| 81 | |
| 100 | |
| 144 | |
| 169 | |
| 196 | |

**Primera condición:** para ser un número BR debe ser divisible por cada una de sus cifras, vamos a vel el comportamiento de cada uno de ellos en la siguiente tabla:

| Cuadrador perfectos | Divisibilidad exacta entre cada una de sus cifras |
|---|---|
| 16 | 16 ÷ 6 = 2,66 |
| 25 | 25 ÷ 5 = 5 |
| 36 | 36 ÷ 6 = 6 |
| 49 | 49 ÷ 4 = 12,25 |
| 64 | 64 ÷ 6 = 10,66 |
| 81 | 81 ÷ 8 = 10,125 |
| 100 | 100 ÷ 1 = 100 |
| 144 | 144 ÷ 4 = 36 |
| 169 | 169 ÷ 9 = 18,77 |
| 196 | 196 ÷ 6 = 32,66 |

| Cuadrador perfectos | Suma de sus cifras | Divisibilidad exacta entre cada una de sus cifras |
|---|---|---|
| 25 | 2 + 5 = 7 | 25 ÷ 7 = 3,57 |
| 36 | 3 + 6 = 9 | 36 ÷ 9 = 4 |
| 100 | 1 + 0 + 0 = 1 | 100 ÷ 1 = 100 |
| 144 | 1 + 4 + 4 = 9 | 144 ÷ 9 = 16 |

De acuerdo con los resultados obtenidos se resaltan de color naranja los números que sí cumplen esta condición, lo que descartamos los otros para seguir analizando los que van quedando.

| Cuadrador perfectos | Suma de sus cifras | Divisibilidad exacta entre cada una de sus cifras |
|---|---|---|
| 25 | 2 + 5 = 7 | 25 ÷ 7 = 3,57 |
| 36 | 3 + 6 = 9 | 36 ÷ 9 = 4 |
| 100 | 1 + 0 + 0 = 1 | 100 ÷ 1 = 100 |
| 144 | 1 + 4 + 4 = 9 | 144 ÷ 9 = 16 |

| Cuadrador perfectos | Divisibilidad exacta entre cada una de sus cifras |
|---|---|
| 216 | 216 ÷ 6 = 36 |

**Segunda condición:** los números BR son divisibles entre la suma de todas sus cifras, analizaremos esta situación en la siguiente tabla:

| Cuadrador perfectos | Suma de sus cifras | Divisibilidad exacta entre cada una de sus cifras |
|---|---|---|
| 25 | 2 + 5 = 7 | 25 ÷ 7 = 3,57 |
| 36 | 3 + 6 = 9 | 36 ÷ 9 = 4 |
| 100 | 1 + 0 + 0 = 1 | 100 ÷ 1 = 100 |
| 144 | 1 + 4 + 4 = 9 | 144 ÷ 9 = 16 |

| Cuadrador perfectos | Suma de sus cifras | Divisibilidad exacta entre cada una de sus cifras |
|---|---|---|
| 216 | 2 + 1 + 6 = 9 | 216 ÷ 9 = 24 |

En este momento solo contamos con tres cuadrados (36, 100 y 144) y un

**Tercera condición:** "Es divisible de manera exacta entre el producto de todas sus cifras".

| Cuadrador perfectos | Suma de sus cifras | Divisibilidad exacta entre cada una de sus cifras |
|---|---|---|
| 36 | 3 • 6 = 18 | 36 ÷ 18 = 2 |
| 100 | 1 • 0 • 0 = 0 | 100 ÷ 0 = no esta definida |
| 144 | 1 • 4 • 4 = 16 | 144 ÷ 16 = 9 |

| Cuadrador perfectos | Suma de sus cifras | Divisibilidad exacta entre cada una de sus cifras |
|---|---|---|
| 216 | 2 • 1 • 6 = 9 | 216 ÷ 12 = 18 |

**Cuarta condición:** "en el caso de los números de tres cifras, son divisibles, por todos los productos posibles, utilizando dos de sus cifras".

Para este caso solo analizaremos los números que tienen tres dígitos que con el 144 y 216, el número 36 califica como RB por solo tener dos dígitos.

Observemos la siguiente tabla:

| Cuadrador perfectos | Suma de sus cifras | Divisibilidad exacta entre cada una de sus cifras |
|---|---|---|
| 144 | 1 • 4 = 4    4 • 4= 16 | 144 ÷ 4 = 36<br>144 ÷ 16 = 9 |
| 216 | 2 • 1 = 2    6 • 1 = 6<br>2 • 6 = 12 | 216 ÷ 2 = 108<br>216 ÷ 6 = 36<br>144 ÷ 16 = 9 |

Según lo anterior podemos afirmar que los números 36, 144 y 216 cumplen con las condiciones establecidas en el problema inicial, por tal razón son números RB.

**16.** Resuelva la siguiente situación

Considere la siguiente información

| Lugar | Costo por $m^3$ de consumo de agua Para un consumo entre 16 y 25 $m^3$ | Equivalencia monetaria |
|---|---|---|
| San José, Costa Rica | ₡ 620 | € 1= ₡ 652,15 |
| Murcia, España | € 2,5 | |

Una familia consumió durante el pasado mes de setiembre 22,5 $m^3$ de agua.

**a)** Si esa familia reside en San José, Costa Rica, entonces ¿Cuál es el monto en colones, "₡" que tendrían que cancelar por ese consumo?

| Consumo en $m^3$ | Costo por $m^3$ de consumo de agua Para un consumo entre 16 y 25 $m^3$ | Monto a pagar |
|---|---|---|
| 22,5 $m^3$ | ₡ 620 | 22,5 • 620 = ₡ 13 950 |

El monto que tiene que cancelar por cconsumo es de ₡ 13 950.

**b)** Si esa familia reside en Murcia, España, entonces ¿Cuál es el monto en euros, "€" que tendrían que cancelar por ese consumo?

| Consumo en $m^3$ en España | Costo por $m^3$ de consumo de agua Para un consumo entre 16 y 25 $m^3$ | Monto a pagar |
|---|---|---|
| 22,5 $m^3$ | € 2,5 | 22,5 • 2,5 = € 56,25 |

**c)** ¿Cuál es la diferencia en colones de lo qe se pagó en Costa Rica con respecto a lo que se pagó en España?

| Consumo en $m^3$ | Costo por $m^3$ de consumo de agua Para un consumo entre 16 y 25 $m^3$ | Monto a pagar |
|---|---|---|
| 22,5 $m^3$ | ₡ 620 | 22,5 • 620 = ₡ 13 950 |

| Consumo en $m^3$ en España | Costo por $m^3$ de consumo de agua Para un consumo entre 16 y 25 $m^3$ | Monto a pagar | Equivalencia en colones |
|---|---|---|---|
| 22,5 | € 2,5 | 22,5 • 2,5 = € 56,25 | 56,25 • ₡ 652,15 = 36 683,43 |

Cuadro comparativo y de diferencia entre el mismo consumo en $m^3$ Costa Rica y España.

| Monto a pagar en Costa Rica por 22,5 $m^3$ de agua | Monto a pagar en España por 22,5 $m^3$ de agua al precio de C.R. | Diferiencia en colones |
|---|---|---|
| ₡ 13 950 | ₡ 36 683,43 | 36, 683,43 - 13 950 = ₡ 22 733 |

**d)** ¿Cuántos Euros se ahorraría la familia de Murcia España, si el costo por m3 de consumo fuera el de San José, Costa Rica?

| Monto a pagar en Costa Rica por 22,5 $m^3$ de agua | Equivalencia del costo de los 22,5 $m^3$ en España | Diferiencia en euros |
|---|---|---|
| ₡ 13 950 | 13 950 ÷ 652,15 | € 21,39 |

Si el costo por m3 de consumo fuera el de San José, Costa Rica, la familia de Murcia España pagaría € 21,39, por lo tanto

56,25 - 21,39 = € 34,86

**Se ahorraría € 34,86**

**17.** Considere la siguiente información sobre un juego de azar
Sobre los materiales del juego:

- Una moneda 100 colones rotulada de la siguiente forma en la cara del escudo se le escribe un 5 y en la cara de la corona se le escribe un 6. Al tirar la moneda sus dos caras tienen la misma probabilidad de quedar hacia arriba.

- Un dado de seis caras, numeradas del 1 al 6 (un número diferente en cada cara). Al tirar el dado, todas sus caras tienen la misma probabilidad de quedar hacia arriba.

Para cada jugada se acuerda que:

- Al tirar la moneda o el dado, se obtiene el número, que queda en la cara que queda hacia arriba.
- Hay dos tipos de jugadas permitidas:

1. La jugada "solo monedas": consiste en tirar dos veces la moneda y sumar los números obtenidos.

2. La jugada "mixta": consiste en tirar la moneda y el dado. Luego se suman los números obtenidos.

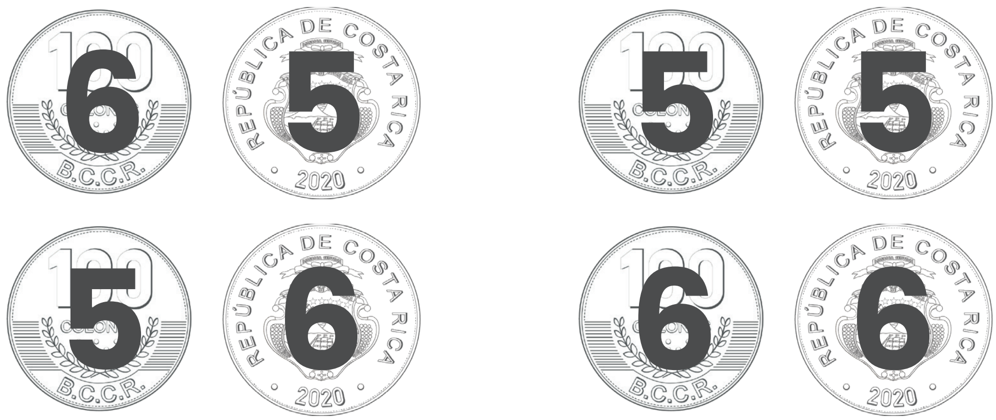
Con base en la información dada, ¿cuál tipo de jugada debe escoger, para tener la mayor probabilidad, de obtener lo que se indica, para cada uno de los siguientes casos?

**Caso1:** Obtener un número mayor o igual que 10.
**Caso 2:** Obtener un número par.
**Caso 3:** Obtener un número compuesto.

Área de respuestas al problema

1. Anote todos los posibles resultados que se pueden obtener con la jugada "solo monedas"

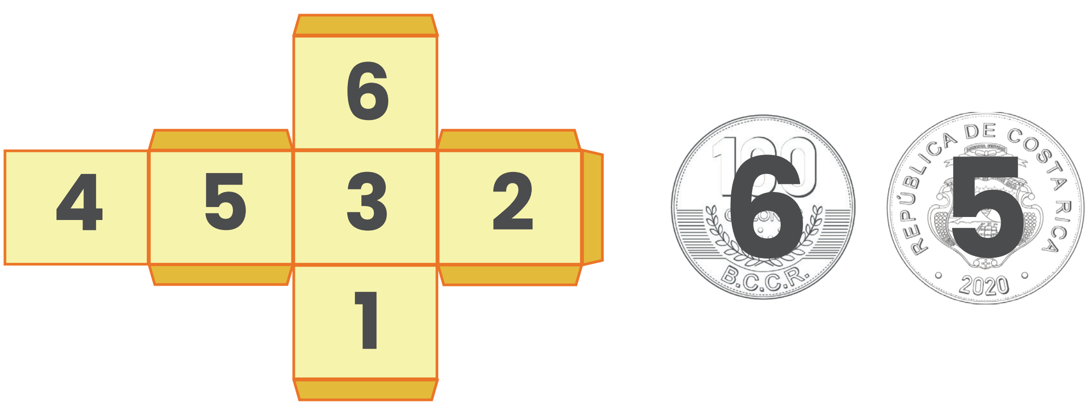
En el caso de las jugadas con la moneda se pueden obtener los siguientes resultados:




En este caso tenemos **cuatro** posibles eventos.

2. Anote todos los posibles resultados que se pueden obtener con la jugada "mixta".

Con el dado se pueden observar lo siguiente:




Tiene seis caras, cada una con igual probabilidad de salir, en el caso de la moneda tienen la misma posibilidad de salir al tirar la moneda.

De acuerdo con lo anterior, puede afirmarse que los posibles resultados son los siguientes:

Con la cara rotulado con el número 5 en la moneda:


Con la cara rotulado con el número 6 en la moneda:


En total hay **doce** posibles resultados.

Respuesta para el caso 1: Obtener un número mayor o igual que 10.

**a.** Analicemos el caso 1. Obtener un número mayor o igual que 10.

En la jugada solo monedas al sumarlos dan 10 o un número mayor que diez, observemos la siguiente tabla:

| Evento | Suma | Resultado de la suma |
|---|---|---|
|  | 6 + 5 | 11 |
|  | 5 + 5 | 10 |
|  | 5 + 6 | 11 |
|  | 6 + 6 | 12 |

Por esta razón podemos afirmar que en el caso 1. "Obtener un número mayor o igual que 10" es un evento seguro de que suceda si lo realizamos bajo la jugada solo monedas.

En el caso de la jugada "mixta", consite en tirar la moneda y el dado, sucede lo siguiente:

| Evento | Suma | Resultado de la suma |
|---|---|---|
|  | 5 + 1 | 6 |
|  | 5 + 2 | 7 |
|  | 5 + 3 | 8 |
|  | 5 + 4 | 9 |
|  | 5 + 5 | 10 |
|  | 5 + 6 | 11 |
|  | 6 + 1 | 12 |
|  | 6 + 2 | 8 |
|  | 6 + 3 | 9 |
|  | 6 + 4 | 10 |
|  | 6 + 5 | 11 |
|  | 6 + 6 | 12 |

Como se observa, de las doce jugadas solo 6 permiten obtener un resultado que al sumarlo sea igual o mayor que 10, por lo tanto, hay un 0,5 de probabilidad que al realizar la jugada mixta logremos lo propuesto en el caso 1.

**b.** Respuesta para el caso 2: Obtener un número par.

En la jugada solo monedas al sumarlos dan cuatro resultados, dos de ellos son pares como se observa:

| Evento | Suma | Resultado de la suma |
|---|---|---|
|  | 6 + 5 | 11 |
|  | 5 + 5 | 10 |
|  | 5 + 6 | 11 |
|  | 6 + 6 | 12 |

De acuerdo con lo anterior, hay un 0,5 de probabilidad que obtengamos un número par si lo realizamos bajo la jugada solo monedas.

En el caso de la jugada "mixta": consiste en tirar la moneda y el dado, sucede lo siguiente:

| Evento | Suma | Resultado de la suma |
|---|---|---|
|  | 5 + 1 | 6 |
|  | 5 + 2 | 7 |
|  | 5 + 3 | 8 |
|  | 5 + 4 | 9 |
|  | 5 + 5 | 10 |
|  | 5 + 6 | 11 |
|  | 6 + 1 | 12 |
|  | 6 + 2 | 8 |
|  | 6 + 3 | 9 |
|  | 6 + 4 | 10 |
|  | 6 + 5 | 11 |
|  | 6 + 6 | 12 |

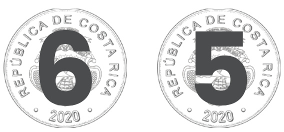
Como se observa, de las doce jugadas 7 permiten obtener un resultado que al sumarlo sea un número par, por lo tanto, hay un 0,58 de probabilidad que al realizar la jugada mixta logremos lo propuesto en el caso 2.

Por lo anterior es más seguro lograr el objetivo de este caso si utilizamos la jugada mixta.

**c.** Respuesta para el caso 3: Obtener un número compuesto.

**Recuerde que** un número compuesto es un número natural que tiene uno o más divisores distintos a 1 y a sí mismo.

En la jugada solo monedas al sumarlos dan cuatro resultados, dos de ellos son números compuestos como se observa:

| Evento | Suma | Resultado de la suma | Divisores del resultado de la suma |
|---|---|---|---|
|  | 6 + 5 | 11 | |
|  | 5 + 5 | 10 | 1, 2, 5,10 |
|  | 5 + 6 | 11 | |
|  | 6 + 6 | 12 | 1, 2, 3, 4, 6, 12 |

De acuerdo con lo anterior, hay un 0,5 de probabilidad que obtengamos un número compuesto si lo realizamos bajo la jugada solo monedas.

Por otro lado, en el caso de la jugada "mixta": consiste en tirar la moneda y el dado, sucede lo siguiente:

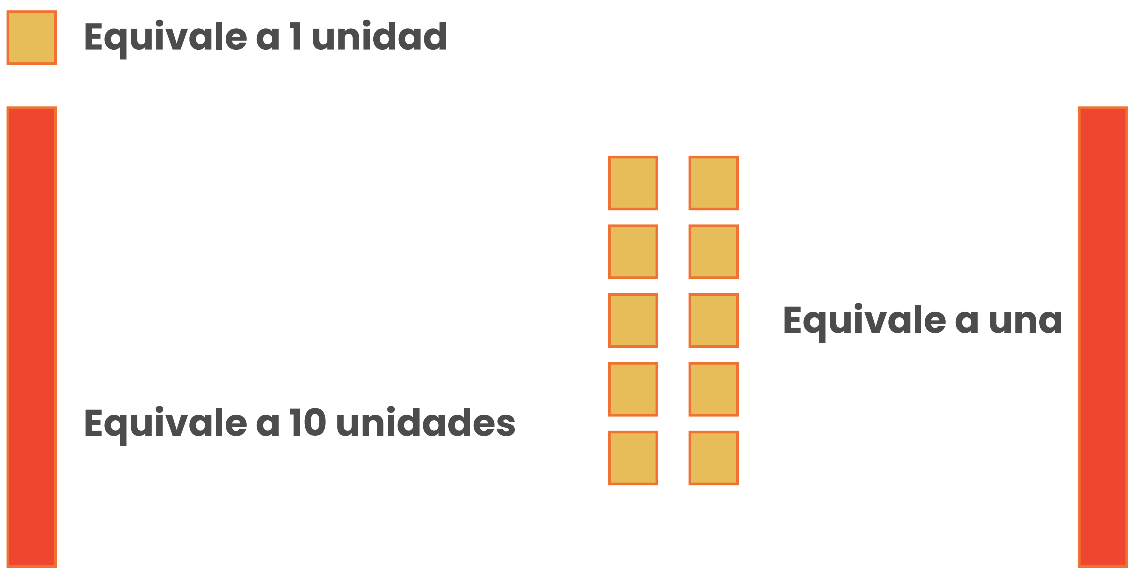
| Evento | Suma | Resultado de la suma | Divisores del resultado de la suma |
|---|---|---|---|
|   | 5 + 1 | 6 | 1, 2, 3, 6 |
|   | 5 + 2 | 7 | 1, 7 |
|   | 5 + 3 | 8 | 1, 2, 4, 8 |
|   | 5 + 4 | 9 | 1, 3, 9 |
|   | 5 + 5 | 10 | 1, 2, 5, 10 |
|   | 5 + 6 | 11 | 1, 11 |
|   | 6 + 1 | 7 | 1, 2, 3, 4, 6, 12 |
|   | 6 + 2 | 8 | 1, 2, 4, 8 |
|   | 6 + 3 | 9 | 1, 3, 9 |
|   | 6 + 4 | 10 | 1, 2, 5, 10 |
|   | 6 + 5 | 11 | 1, 11 |
|   | 6 + 6 | 12 | 1, 2, 3, 4, 6, 12 |

De las doce jugadas 9 permiten obtener un resultado que al sumarlo sea un número compuesto, por lo tanto, hay un 0,75 de probabilidad que al realizar la jugada mixta logremos obtener un número compuesto.

De acuerdo a lo anterior es más seguro lograr el objetivo de este caso si utilizamos la jugada mixta.

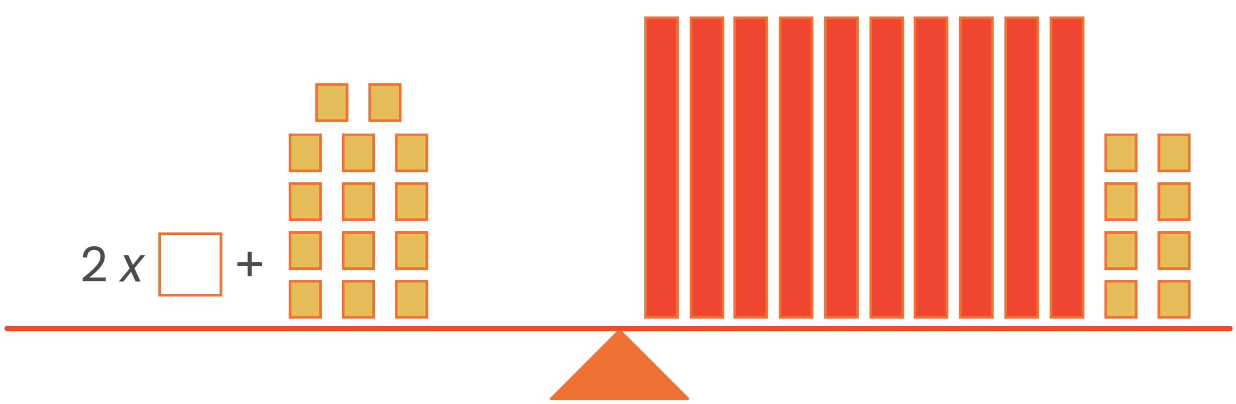
**18.** El valor faltante en el recuadro $2 \times \square + 14 = 108$ para que la expresión tenga sentido corresponde a

Consideremos lo siguiente:

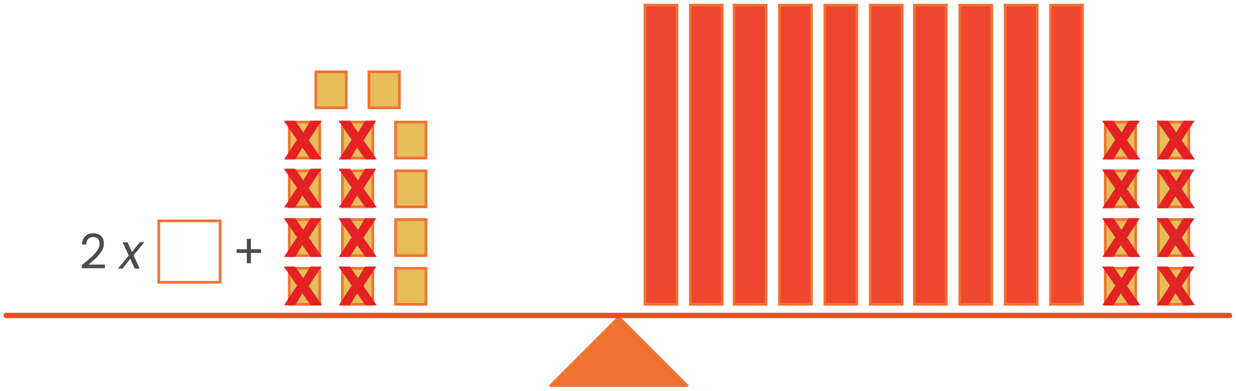



De acuerdo con lo anterior, utilicemos la balanza vista en el I Ciclo de la Educación Genral Básica (EGB) para obtener la respuesta de una manera simple al problema:

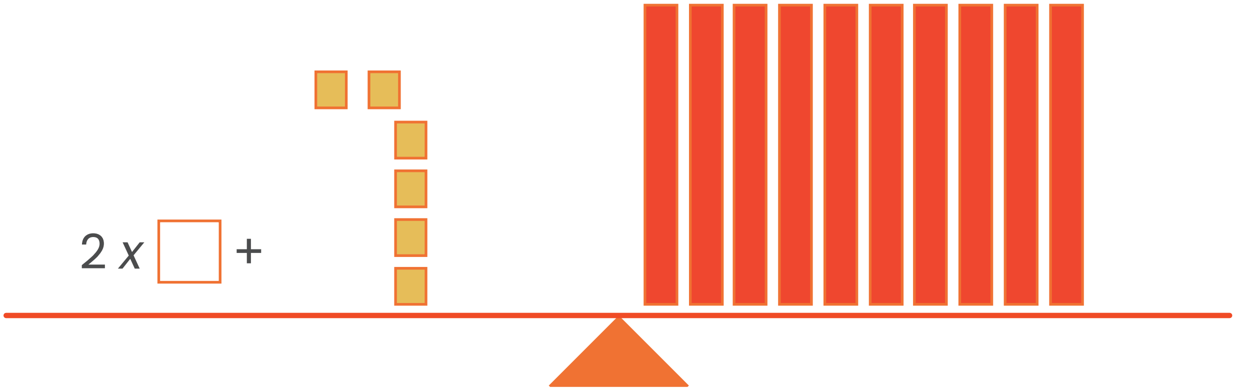
Considerando la expresión $2\,x \square + 14 = 108$ y la siguiente representación gráfica



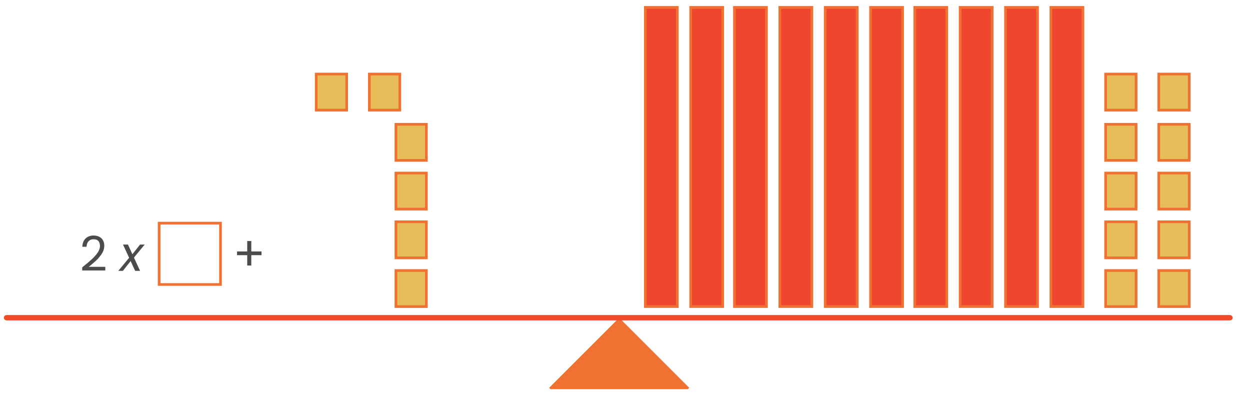
Segun lo anterior, podemos aplicar cancelación de figuras iguales a ambos lados de la balanza e incluso la ley cambio para descomponer otras por valores ya conocidos, como se sigue desarrollando.



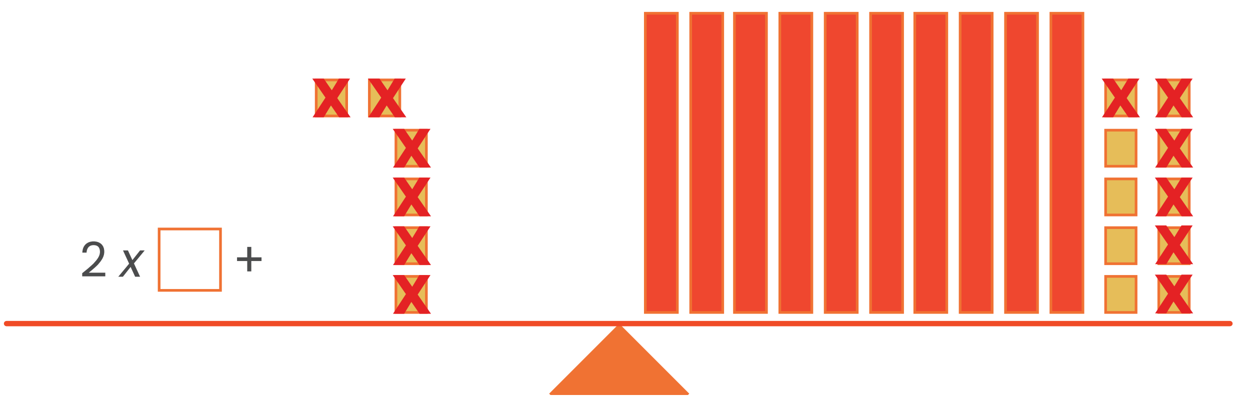

Al cancelar las representaciones que tiene un mismo valor a ambos lados d ela balanza nos queda:



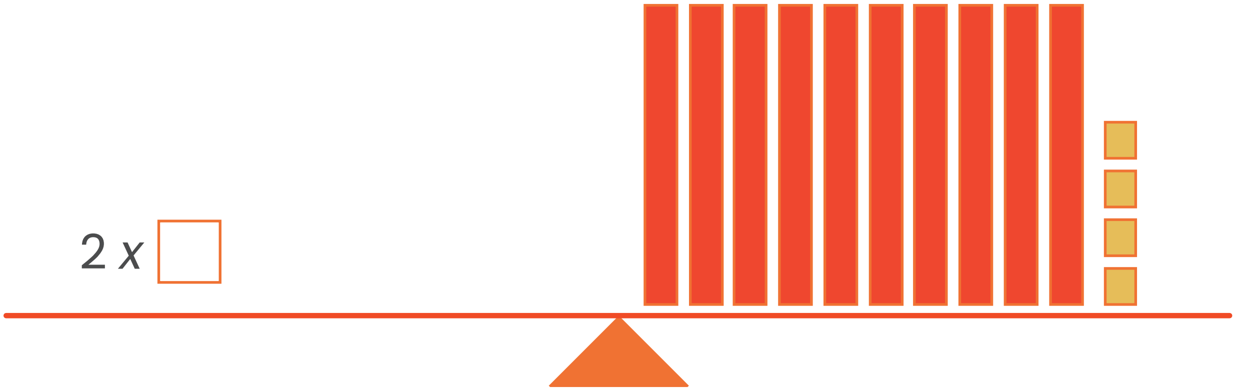
De acuerdo con los datos resultantes vamos a aplicar la ley de cambio y descomponemos una regleta según su equivalencia para seguir cancelando



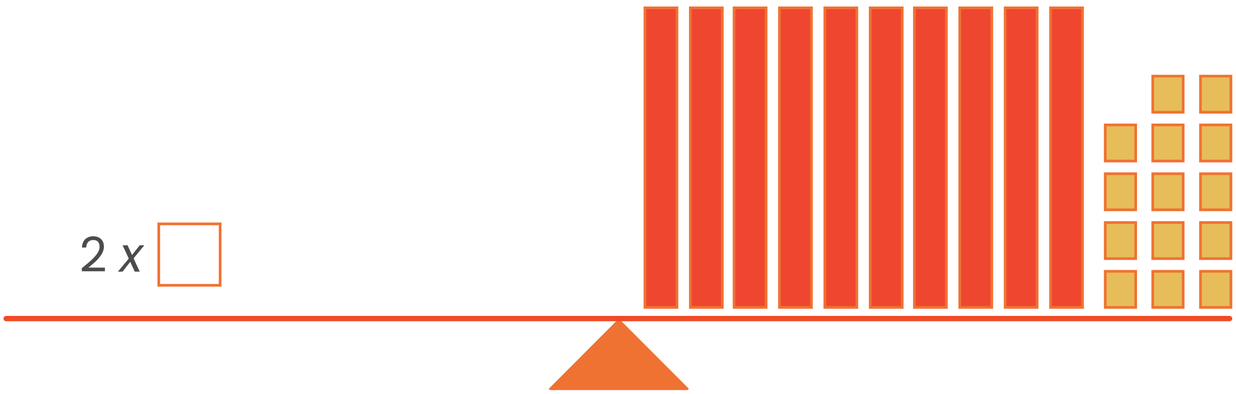

Vamos a quitar a ambos lados de la balanza los cuadrados amarillos que tiene un valor de una unidad



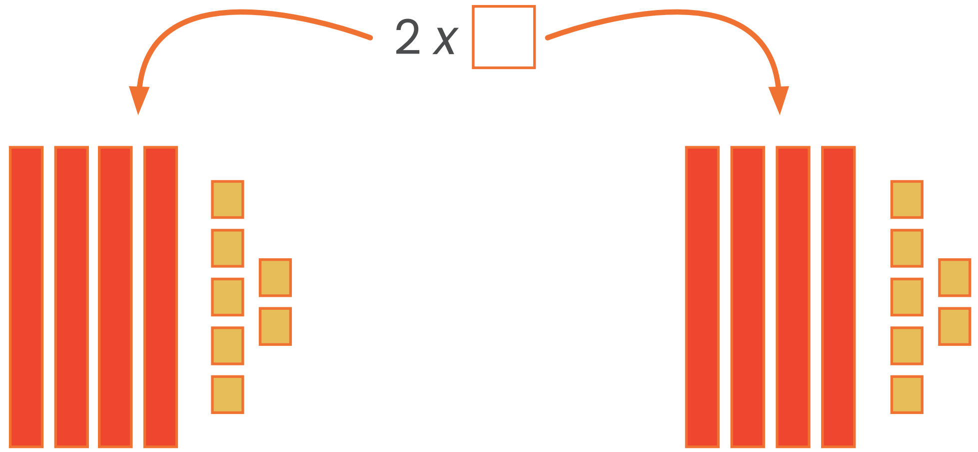
Quedando lo siguiente a ambos lados de la balanza:




Vamos a descomponer otra regleta:



Vamos a realizar una repartición de los que encontramos en el extremo derecho:




Recuerde que cada regleta tiene un valor de diez unidades y cada cuadrado amarillo de una unidad, por lo tanto, 2 *x* $\square$ equivale a 94 unidades y cada $\square$ vale 47 unidades.

**19.** El valor faltante en el recuadro 3 *x* $\square$ - 24 = 120 para que la igualdad sea verdadera.

Una manera diferente a la utilizada en el problema 19 sería pensar en un posible prueba y error, como se muestra seguidamente:

$$3 \times \square - 24 = 120$$

Cambiemos en $\square$ por 10 y resolvamos la operación que se muestra a la derecha de la igualdad:

$$3 \times 10 - 24$$

6 Al probar 10 en lugar del $\square$ el resultado es 30, por lo que es necesario utilizar un valor más grande para aproximarse a 120.

Probemos con el posible valor de $\square$ igual a 40

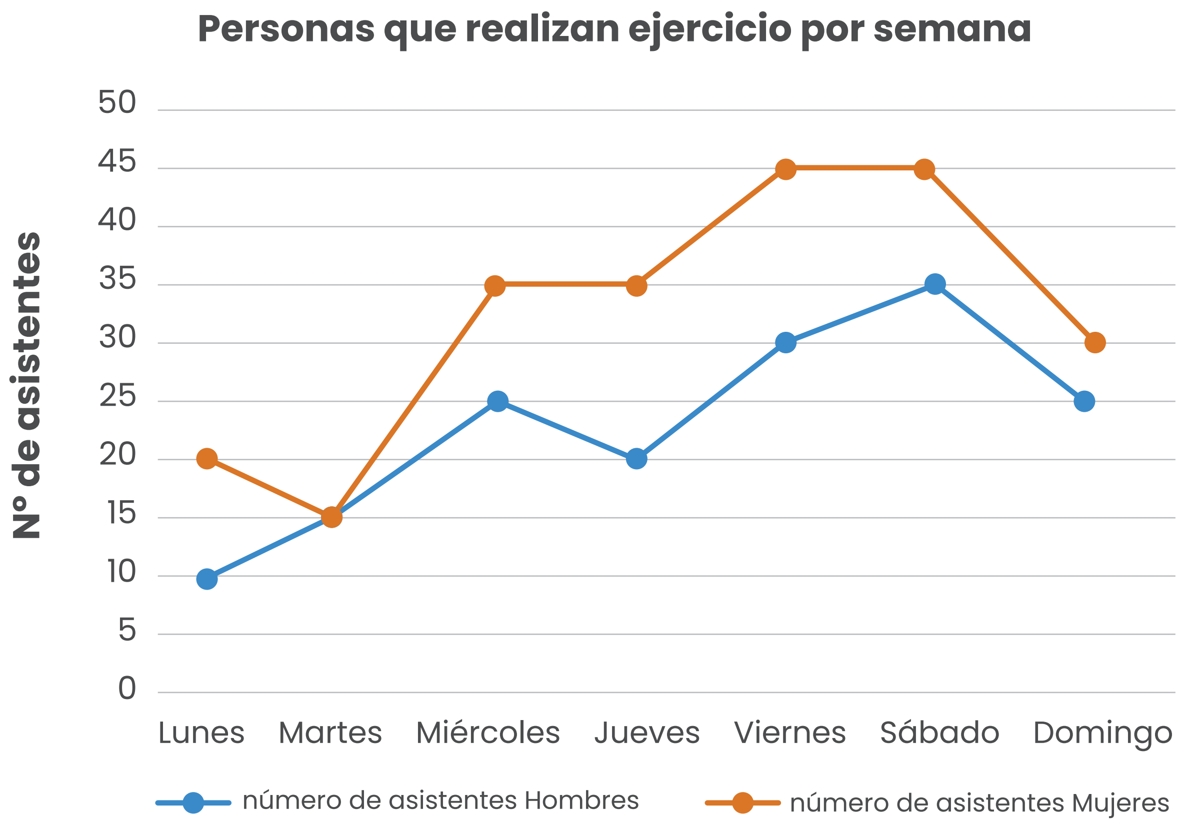
96 Aún cambiando por 40 nos hizo falta, por lo que debemos probar con un número mayor

**$\square$ Igual a 48**

$$3 \times 48 - 24$$

120 Si sustituimos el $\square$ por 48 si obtenemos el mismo valor que se encuentra en el extremo izquierdo de la igualdad.

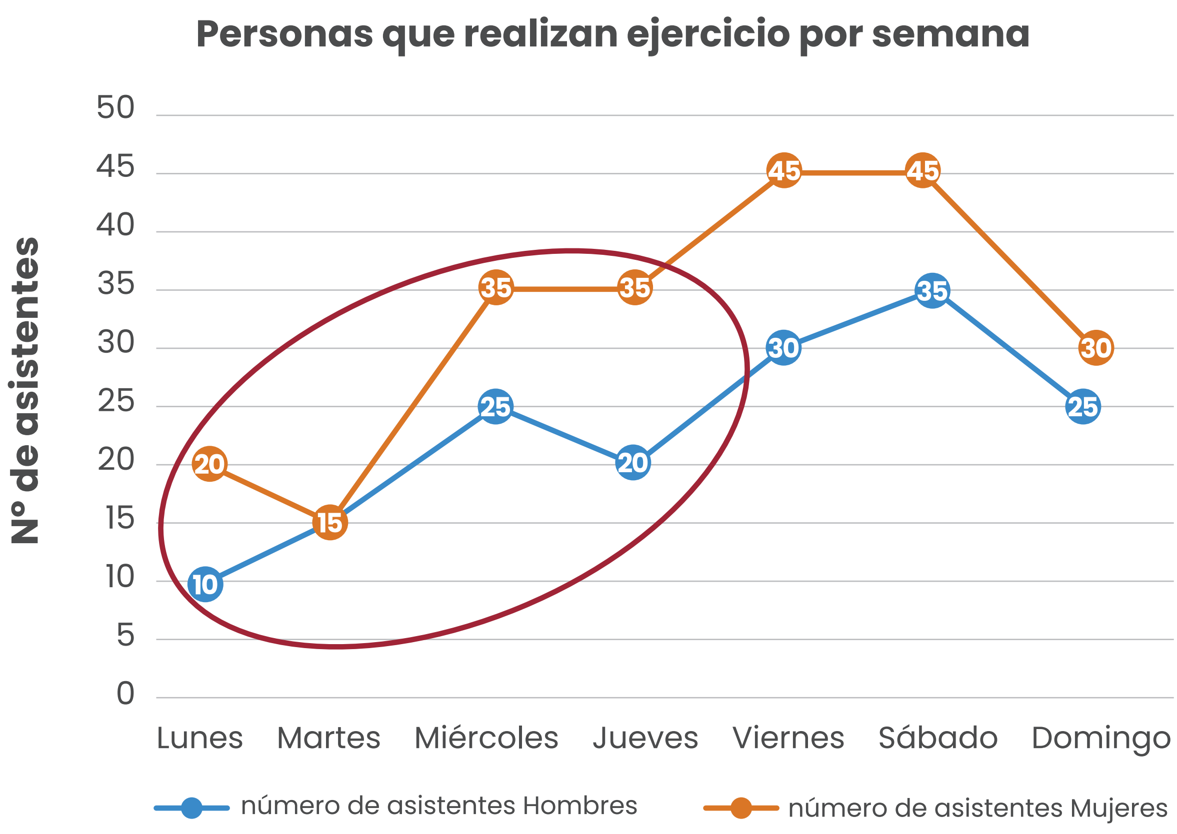
Observe el siguiente gráfico y conteste las tres preguntas que a continuación se le dan tomando en cuenta personas que participaron en deportes para contestar los ítems 16 y 17.



**20.** Según el gráfico anterior ¿Cuántas personas en total participaron entre el lunes y el jueves?

Para ello priero debemos determinar el número de participantes en los días: lunes, martes, miércoles y jueves.

Vamos a identificar en el gráfico la cantidad de hombres y mujeres que participaron cada día.



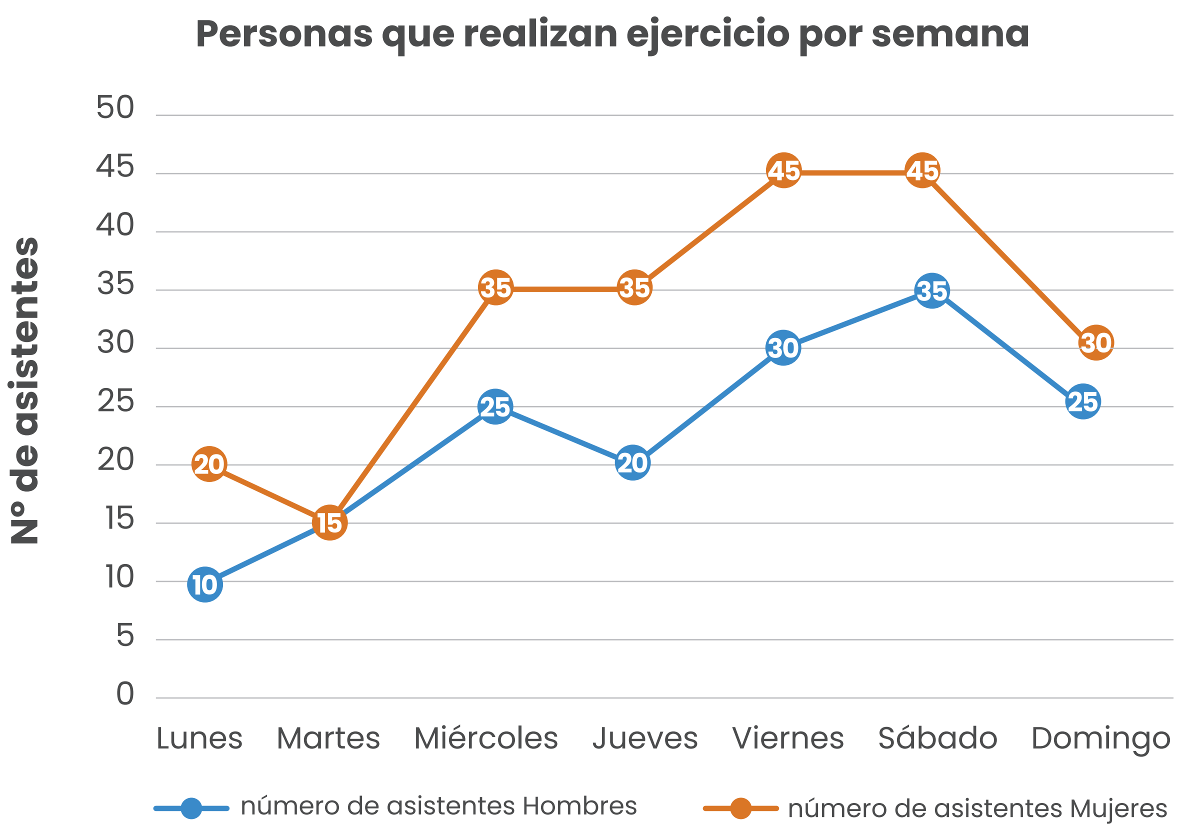
En la siguiente tabla se sistematiza la cantidad de participantes por día y por sexo:

| Día | Hombres | Mjeres | Total |
|---|---|---|---|
| Lunes | 10 | 20 | **30** |
| Martes | 15 | 15 | **30** |
| Miércoles | 25 | 35 | **60** |
| Jueves | 20 | 35 | **55** |
| **Totales** | **70** | **105** | **175** |

En total en esos 4 días participaron 175 personas entre hombres y mujeres.

**21.** De acuerdo con el gráfico anterior, durante la semana ¿cuántas mujeres participaron más que hombres?

En el siguiente gráfico se observan las cantidades diarias de participación por día y sexo:



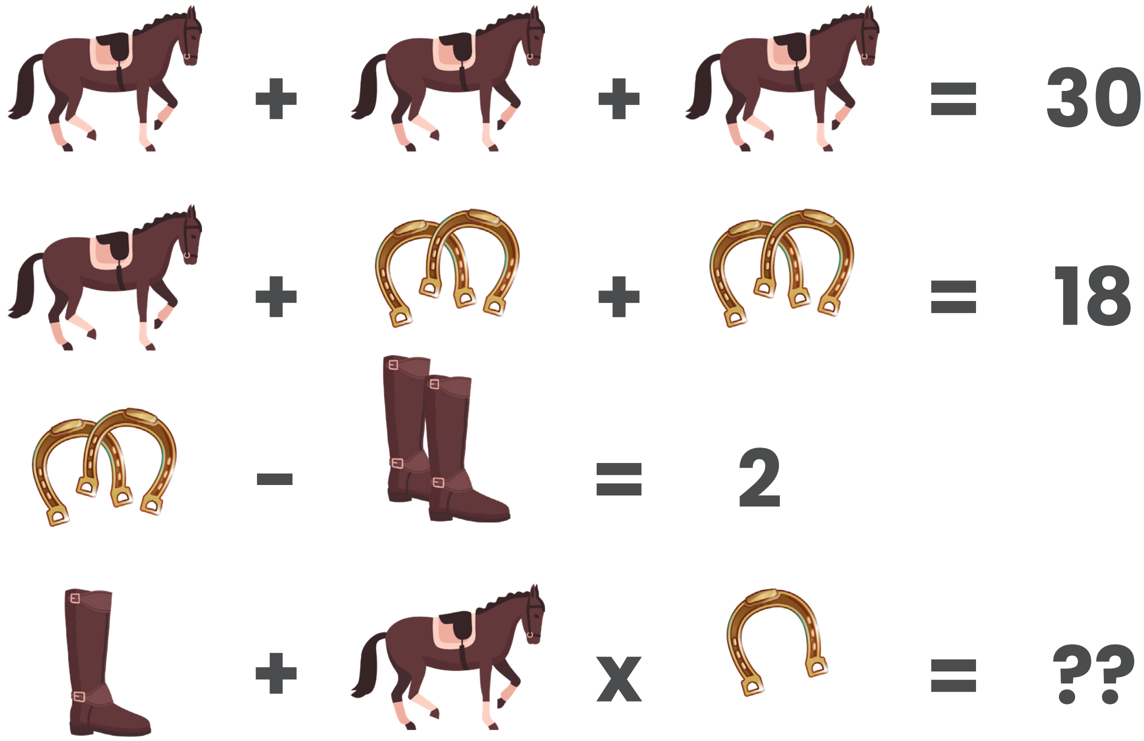
En la siguiente tabla resumimos la información:

| Día | Hombres | Mjeres | Total |
|---|---|---|---|
| Lunes | 10 | 20 | **30** |
| Martes | 15 | 15 | **30** |
| Miércoles | 25 | 35 | **60** |
| Jueves | 20 | 35 | **55** |
| Viernes | 30 | 45 | **75** |
| Sábado | 35 | 45 | **80** |
| Domingo | 25 | 30 | **55** |
| **Totales** | **160** | **225** | **385** |

En total asistieron en la semana 385 personas, de ellos 225 son mujeres y 160 hombres.

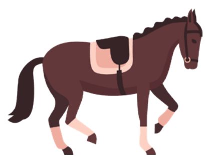
Por lo tanto, participaron 65 mujeres más que hombres.

Observemos la siguiente información para responder las preguntas 18 y 19



**22.** De acuerdo con la imagen anterior ¿Cuál es el valor correspondiente a la herradura?:

Como estrategia vamos a iniciar en aquella igualdad que esta con una misma imagen y a la vez igualada a una cantidad, como la siguiente:

 +  +  = 30

En este caso tenemos que 3 caballos tienen un valor de 30 unidades, por lo que podemos afirmar que:

| | |
|---|---|
| **30** | **3** |
| **0** | **10** |

De acuerdo con lo anterior un caballo vale 10 unidades.

Como ya conocemos el valor de un caball, vamos a valorar la segunda igualdad:

 +  +  = 18

En esta ya conocemos un elemento, por lo que quedaría algo así:

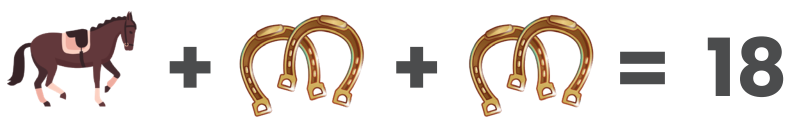
10 +  +  = 18

Podemos utilizar la estrategia de la prueba y error. Pensando en dos números (iguales) que sumados con 10 me dan 18.

En este caso sería el número 4 porque: 10 + 4 + 4 + 4 =18

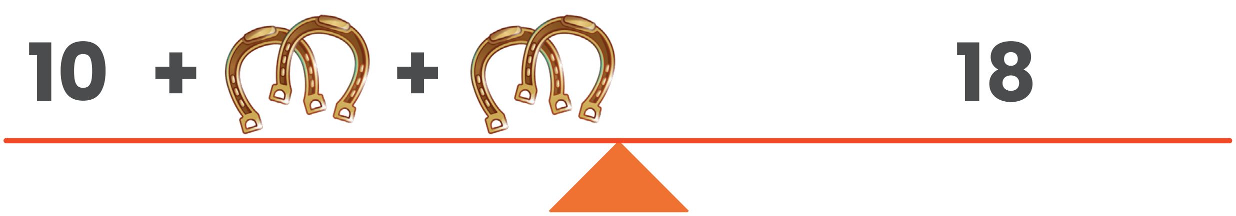
Lo que nos permite determiar que el valor de una herradura es 4 unidades.

Recuerde que también podemos hacer uso de la balanza utilizada en el I Ciclo de la Educación General Básica (EGB) como se muestra:

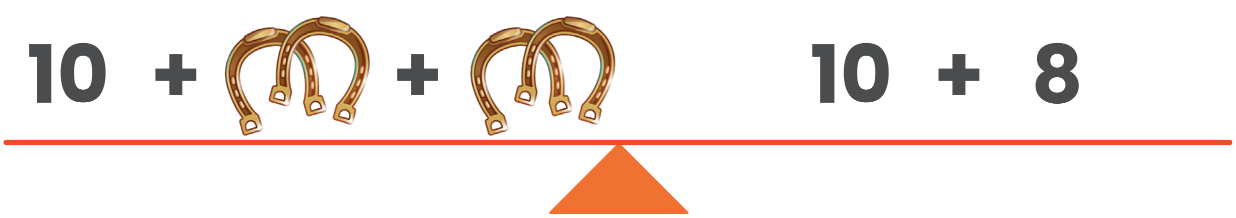
La expresión 

es

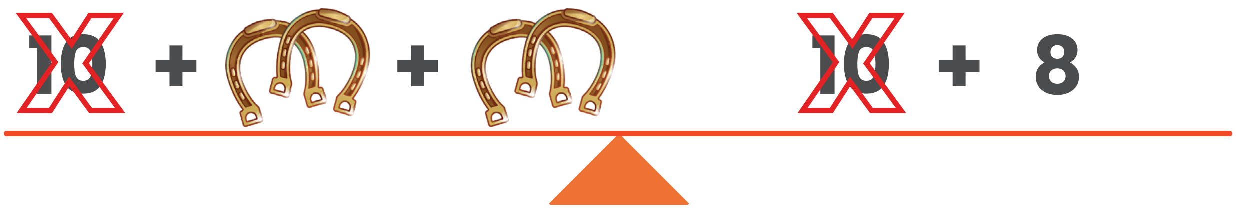
equivalente a:



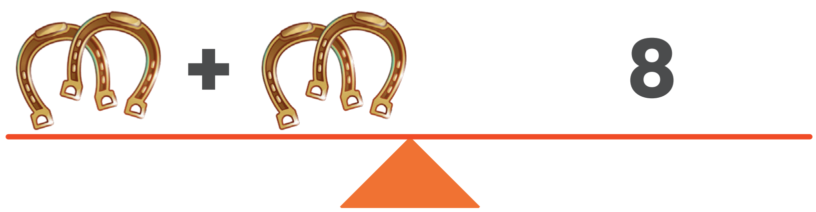

Vamos a descomponer el valor del extremo derecho de la balanza:



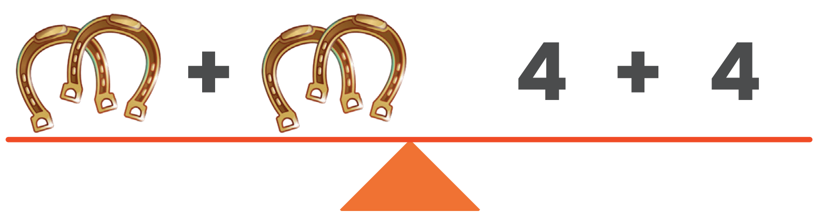
Vamos a descomponer el valor del extremo derecho de la balanza:



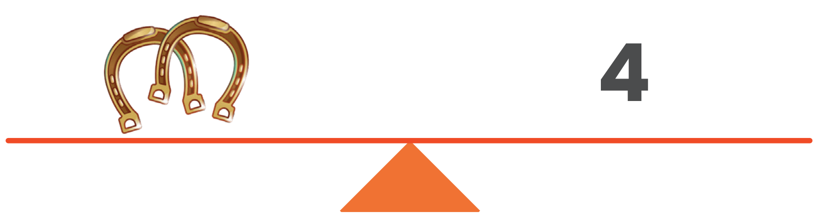

Para obtener la siguiente balanza




Volviendo a descomponer la cantidad que se observa al lado derecho queda así:



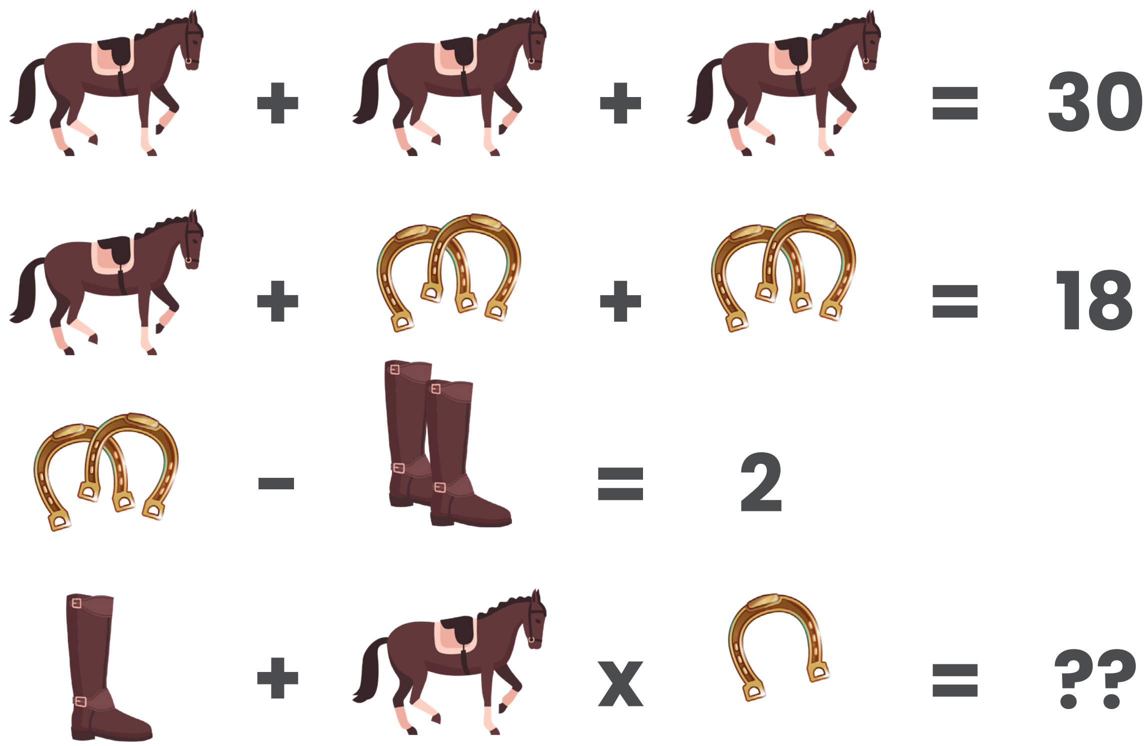

Para determinar que el valor de una herradura sería:




Como se observa en el procedimiento anterior el valor de una herradura es de 4 unidades al igual que en este caso.

**23.** De acuerdo con la imagen anterior ¿Cuál es el resultado de la última operación?

En la imagen



Aparecen varios valores desconocidos, de los cuales ya averiguamos algunas como el caballo el cual tiene un valor de 10 unidades y la herradura que equivale a 4 unidades. Podemos ir completando para determinar los datos que falta en esas igualdades, esa imagen es equivalente a lo siguiente:

**10 + 10 + 10 = 30**

**10 + 4 + 4 = 18**

 **-**  **= 2**

 **+**  **x**  **= ??**

Para determinar los valores que deben ir en la última igualdad necesitamos determinar el valor de las botas.

**4 -**  **= 2**

En este caso si lo necesitamos por prueba y error nos preguntamos, ¿qué número le resto a 4 para que me de 2?, el resultado sabemos que es 2.

Con este dato podemos sustituir los valores que se involucran en la última igualdad para determinar el valor solicitado:

$$2 \quad + \quad 10 \quad + \quad 4 \quad = \quad 16$$

De acuerdo con lo anterior, el valor solicitado para la última igualdad es de 16.

**Observación:**
Recuerde: En primaria utilizamos como signo para la multiplicación la letra "x" sin embargo, podemos valorar el uso del punto para ir familiarizando a los niños con esta otra forma de representar esta operación en la secundaria.

**Créditos**
Los ítems fueron tomados de la prueba aplicadas en las diferentes etapas de la OLCOMEP 2020 y del cuadernillo de apoyo para el estudiante y el profesor de la olimpiada 2018.

**Compilación y estrategias de solución de los cuadernillos realizadas por:**

Alejandra Sánchez Ávila
**Encargada de la Cátedra de Didáctica de la Matemática, Universidad Estatal a Distancia (UNED).**

Carlos Alfaro Rivera
**Profesor de Matemática Escuela de Formación Docente, Universidad de Costa Rica (UCR).**

**Revisores de los cuadernillos**

Mónica Mora Badilla
**Profesora de Matemática Escuela de Formación Docente, Universidad de Costa Rica (UCR).**

Hermes Mena Picado
Asesor Nacional de Matemática.
**Departamento de Primero y Segundo Ciclos**
**Dirección de Desarrollo Curricular**

Ministerio de
Educación Pública

UNIVERSIDAD DE
COSTA RICA

UNED

Olimpiada Nacional
de Matemática en Primaria