Ministerio de Educación Pública
Dirección de Desarrollo Curricular
Departamento de Primero y Segundo Ciclos
Asesoría Nacional de Matemática

Olimpiada Costarricense de Matemática para Educación Primaria - OLCOMEP

6º | CUADERNILLO DE APOYO PARA EL DOCENTE

SEXTO AÑO 2022

PRESENTACIÓN

Es fundamental que nuestro sistema educativo fomente en la sociedad costarricense, todas las actividades posibles orientadas a estimular el desarrollo matemático, científico y tecnológico, a efecto de formar personas críticas y analíticas, habilidades necesarias para hacer frente a los retos y demandas contemporáneas.

La enseñanza de la Matemática ocupa un papel clave en el currículo escolar y persigue el desarrollo de un proceso intelectual en los estudiantes. La Olimpiada Costarricense de Matemática para Educación Primaria **OLCOMEP**, tiene como finalidad estimular y desarrollar entre los niños y niñas sus capacidades de resolución de problemas matemáticos, por medio de una competencia de conocimiento sana entre estudiantes de los seis años escolares de la Educación General Básica diurna de todas las direcciones regionales educativas del país.

El presente cuadernillo pretende ser un insumo de apoyo para el docente y practica para el estudiante. El mismo busca orientar a los y las participantes de la **OLCOMEP**, por medio de la presentación de problemas recopilados de las pruebas aplicadas en ediciones anteriores de la misma olimpiada. Su contenido pretende dar pautas sobre los tipos de problemas a los que se van a enfrentar los y las estudiantes en las diferentes etapas que comprende la **OLCOMEP**, así como sus estrategias de resolución.

Los problemas aquí seleccionados se fundamentan en situaciones matemáticas donde se requiera manifestar las habilidades que caractericen el talento matemático para lograr su resolución, basados en los niveles de complejidad de los problemas descritos en el Programa de Estudio en Matemáticas (MEP, 2012) y por medio de los diferentes contextos que se consideran para la olimpiada.

Comisión Central de OLCOMEP

1. Felipe cada 7 días lava el carro de su padre por ₡ 2800. Él ahorra ese dinero y por cada ₡ 1500 que tiene se compra 5 sobres de cartas para su álbum de la Eurocopa. Si empezó a hacer esto hace 161 días, ¿cuántos sobres de cartas se ha comprado hasta el momento?

Solución:
Calculemos cuántas veces ha lavado Felipe el carro de su papá. Según el enunciado, Felipe inició lavando el carro de su padre hace 161 días. Como lo lava cada 7 días, entonces para determinar cuántas veces ha lavado el carro realizamos la operación 161 ÷ 7 obteniendo como resultado 23. Podemos verificar este resultado pues 23 x 7 = 161.

Así, Felipe ha lavado 23 veces el carro de su papá. Por cada vez que lo lava se gana ₡ 2800, por lo que en total se ha ganado

2800 x 23 = 64 400 colones

Por cada ₡ 1500 ganado se compra 5 sobres, así con 15 000 colones se compra 50 sobres. Podemos hacer una tabla para ayudarnos con los cálculos.

Cantidad de sobres	Costo en colones
5	1 500
50	15 000
100	30 000
200	60 000

Felipe en total ha ahorrado 64 400 colones, si con ₡ 60 000 compra 200 sobres. Todavía le quedan 4400 colones, con los cuáles puede hacer 2 compras de sobres pues, cada vez que tiene ₡ 1500 hace una compra de 5 sobres, por lo que con ₡ 3000 hace dos compras de 5 sobres cada una, o sea, compra 10 sobres más. Así que en total ha comprado 210 sobres (42 compras de ₡ 1500 cada una) y le sobran 1400 colones.

2. La maestra colocó en la pizarra la siguiente operación

3 + 3 x 15 ÷ 3

Tres alumnos la resolvieron de la siguiente manera

Pablo
3 + 3 x 15 ÷ 3
= 6 x 15 ÷ 3
= 90 ÷ 3
= 30

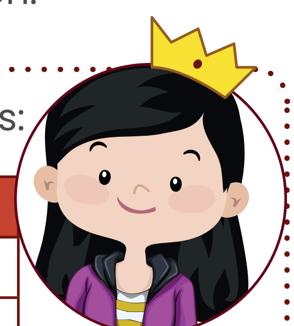
Sara
3 + 3 x 15 ÷ 3
= 3 + 45 ÷ 3
= 3 + 15
= 18

Ernesto
3 + 3 x 15 ÷ 3
= 3 + 45 ÷ 3
= 48 ÷ 3
= 16

¿Cuál de los tres niños lo resolvió de una manera correcta?

Solución:
Observe que en la operación 3 + 3 x 15 ÷ 3 se tiene la combinación de 3 operaciones: suma (adición), resta (sustracción) y división.

Recordemos la prioridad en el orden de las operaciones:



Prioridad	Operación
1º	Multiplicaciones y divisiones
2º	Sumas y restas

Las multiplicaciones y divisiones tienen igual prioridad, por lo que se resuelven en el orden que aparezcan de izquierda a derecha. Lo mismo sucede con las sumas y restas.

Si observamos el procedimiento hecho por Pablo, él resuelve primero la suma, luego la multiplicación y de último la división. Por lo que no está respetando la prioridad, pues la multiplicación y división tienen prioridad ante la suma. Así, el procedimiento es incorrecto.

Pablo
3 + 3 x 15 ÷ 3
= 6 x 15 ÷ 3
= 90 ÷ 3
= 30

Al observar el procedimiento de Sara, vemos que ella resuelve primero la multiplicación, luego la división y por último la suma. Note que respeta la prioridad, aunque la multiplicación y división tienen igual prioridad, ella las resolvió en el orden que aparecen: primero la multiplicación y luego la división. Por lo que el procedimiento es correcto.

Sara
3 + 3 x 15 ÷ 3
= 3 + 45 ÷ 3
= 3 + 15
= 18

Aunque ya encontramos quién hizo el procedimiento correcto, analicemos el caso de Ernesto.

Ernesto resolvió las operaciones en el orden: multiplicación, suma y división. Por lo que no está respetando la prioridad pues la división tiene prioridad ante la suma. Así el procedimiento de Ernesto es incorrecto.

Ernesto
3 + 3 x 15 ÷ 3
= 3 + 45 ÷ 3
= 48 ÷ 3
= 16

Por lo tanto, Sara fue quién resolvió correctamente la operación.

3. Javier va a la tienda a comprar un televisor, él sabe que además del precio marcado en el televisor debe agregarle el 10% de impuesto de venta, para saber el costo final de este. Un primer vendedor le ofrece un 40% de descuento en el precio final de la compra. Otro vendedor le ofrece un 50% de descuento en el precio del televisor sin impuesto, pero al facturar le agregarán el impuesto sobre el monto original. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

a) Es más conveniente la oferta del primer vendedor.
b) Las dos ofertas al final representan el mismo precio.
c) Es más conveniente la oferta del segundo vendedor.

Solución:
Antes de resolver el problema recordemos como se calcula el m% de una cantidad dada P.

Supongamos que tenemos una cantidad dada P y queremos calcularle el **m%** de esa cantidad, para esto realizamos la operación

$$\frac{m}{100} \text{ x } P$$

Por ejemplo, si queremos calcular el 18% de 1200 entonces resolvemos la operación

$$\frac{18}{100} \times 1200 = 0{,}18 \times 1200$$

Que corresponde a 216. Es decir, 216 es el 18% de 1200.

Analicemos cada una de las ofertas.

a. Un primer vendedor le ofrece un 40% de descuento en el precio final de la compra.

El precio final de la compra corresponde al precio marcado más 10% del impuesto de venta, supongamos que **p** es el precio marcado entonces el impuesto de venta lo calcularíamos con la operación 0,1 x **p** (el 10% del precio marcado). El precio de compra sería la suma del precio marcado más el impuesto de venta, es decir,

$$\mathbf{p} + 0{,}1 \times \mathbf{p} = 1{,}1 \times \mathbf{p}$$

A este precio (1,1 x **p** pues ya se le aplicó el impuesto de venta) se le aplica un 40% de descuento. Para calcular cuánto corresponde al descuento hacemos la operación 0,4 x (1,1 x **p**). El precio final, lo calcularíamos con la resta del precio ya aplicado el impuesto y el descuento. Por lo que el precio quedaría en

$$1{,}1\,\mathbf{p} - 0{,}4 \times (1{,}1 \times \mathbf{p}) = 1{,}1\,\mathbf{p} - 0{,}44 \times \mathbf{p} = 0{,}66 \times \mathbf{p}$$

b. Otro vendedor le ofrece un 50% de descuento en el precio del televisor sin impuesto, pero al facturar le agregarán el impuesto sobre el monto original.

Apliquemos primero el descuento al precio sin el impuesto

$$\mathbf{p} - 0{,}5 \times \mathbf{p} = 0{,}5 \times \mathbf{p}$$

Luego le sumamos el 10% del impuesto, calculado sobre el precio original que corresponde a **p**, es decir,

$$0{,}5 \times \mathbf{p} + 0{,}1 \times \mathbf{p} = 0{,}6 \times \mathbf{p}$$

Si comparamos los dos precios

Oferta	Monto a pagar
1	0,66 x **p**
2	0,6 x **p**

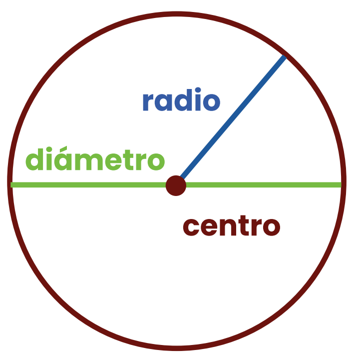
Observe que el primero monto corresponde al 66% del precio marcado, mientras que el segundo corresponde al 60% del precio marcado. Por tanto, la afirmación correcta es

Es más conveniente la oferta del segundo vendedor.

4. Hay dos círculos, uno grande y uno pequeño. El radio del grande es el doble del diámetro del pequeño. Si la circunferencia del círculo pequeño se estira y se coloca sobre la circunferencia del círculo grande, ¿Qué porción de dicha circunferencia cubriría?

Solución:

Recordemos, a partir de su representación gráfica:
El concepto de radio y diámetro. Además, de la fórmula para determinar la medida de la circunferencia de un círculo



La longitud de la circunferencia la calculamos con la fórmula

$$A = 2\pi r$$

donde r es el radio.

Observe que el diámetro mide el doble del radio.

Tenemos dos círculos con radios diferentes, supongamos **r** para el círculo pequeño y **R** para el círculo grande. Además, sabemos que el radio del círculo grande es el doble del diámetro del círculo pequeño. Si representamos con **d** el diámetro del círculo pequeño entonces

$$\mathbf{R} = 2 \times \mathbf{d}$$
$$\mathbf{R} = (2 \times 2) \times \mathbf{r}$$
$$\mathbf{R} = 4\mathbf{r}$$

Recuerde que el doble de una cantidad es ella misma dos veces, por ejemplo:

El doble de 2 es 4 — 4 es igual a 2 + 2

El de 3 es 6 — 6 es igual a 3 + 3

También podemos multiplicar el número por 2 para determinar su doble.

Pero además sabemos que en todo círculo la medida del diámetro es dos veces la medida del radio, entonces **d = 2 x r**. Por lo tanto, el radio del círculo grande lo podemos calcular con la fórmula

$$\mathbf{R} = 2\text{x}\ (2\text{x}r) = (2 \text{ x } 2)\ \text{x}r = 4r$$

Si $2\pi r$ es la medida de la longitud de la circunferencia del círculo pequeño entonces la medida de la longitud de la circunferencia del círculo grande es:

$$2\pi R = 2\pi\ (4r) = 8\pi r$$

Por lo que la medida de la circunferencia del círculo grande es 4 veces la medida de la circunferencia del círculo pequeño ($8\pi r=4(2\pi r)$). Si la circunferencia del círculo pequeño se estira y se coloca sobre la circunferencia del círculo grande entonces la circunferencia pequeña cubriría una cuarta parte de la circunferencia grande.

5. Pepe está en una sala de juegos, y nota cierta regularidad entre la cantidad de fichas que ingresa en una de las máquinas y la cantidad de tiquetes de premio que salen. Él registra la información en la tabla adjunta.

Fichas que ingresan	Tiquetes de premio que salen
1	3
2	5
3	9
4	15

Según el comportamiento observado de la máquina, ¿cuántas fichas debe ingresar para obtener 33 tiquetes de premio?

Solución:
Observemos el aumento en la cantidad de tiquetes

Fichas que ingresan	Tiquetes de premio que salen	
1	3	**+2**
2	5	**+4**
3	9	**+6**
4	15	

Con esos datos podemos continuar la tabla

Fichas que ingresan	Tiquetes de premio que salen	
1	3	**+2**
2	5	**+4**
3	9	**+6**
4	15	**+8**
5	23	**+10**
6	33	

Así que para obtener 33 tiquetes se deben ingresar 6 fichas.

6. Adrián quiere una nueva consola de video juego, él la ve en una página de internet y el costo es de 234 euros. Su padre le dice que la consola en internet es 10% más barata que el precio de la consola en la tienda del lado de su casa. Si el tipo de cambio es de ₡ 735 por euro ¿cuál sería el precio en la tienda del lado de su casa?

Solución:
El precio de la consola en internet es 10% más barata que el precio de la consola de la tienda de al lado de su casa.

Supongamos que "**p**" sea el precio de la consola en la tienda. Entonces podemos decir que al restarle al precio en tienda, el 10% del mismo, corresponde a 234 euros.

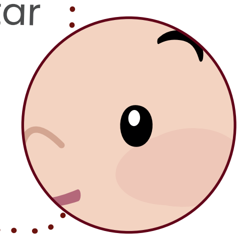
$1\,\mathbf{p} - 0{,}1\,\mathbf{p} = 234$

$0{,}9\,\mathbf{p} = 234$

$\mathbf{p} = 260$

Observe que a una "**p**" le vamos a restar "0,1 **p**"

Por lo tanto: $1\,\mathbf{p} - 0{,}1\,\mathbf{p} = 0{,}9\,\mathbf{p}$



Si queremos el precio en colones, debe convertir los euros a colones. El enunciado nos indica que cada euro equivale ₡ 735. Así multiplicando la cantidad de euros por colones, obtenemos el precio en colones

$$260 \times 735 = ₡\ 191\,100$$

Por lo tanto, el precio de la consola en la tienda es de ₡ 191 100

7. Marta y Pepe están en la sala de espera de un hospital, tienen en frente un reloj de pared, como el que se muestra en la imagen. Pepe dice que se ha imaginado una forma de cortar el reloj en tres partes iguales, tal que: los cortes se hacen de forma recta desde el centro hasta los números, de forma que la suma de los números que queden entre los cortes de cada parte no resulta múltiplo de los factores de diez. ¿Cuánto suman los números en los cuales ha realizado los cortes?

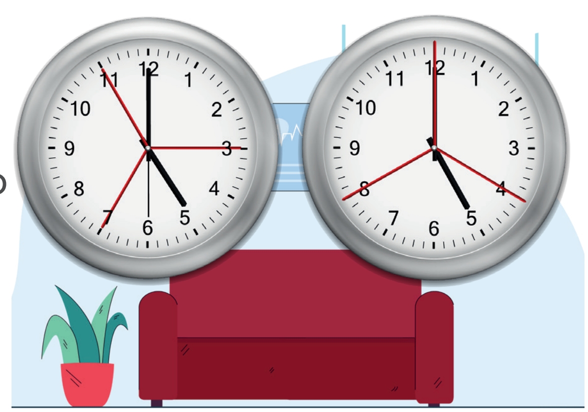
Solución:

Tomemos en cuenta la información que indica el enunciado:

- cortar el reloj en tres partes iguales.
- los cortes se hacen sobre los números.
- la suma de los números que queden entre los cortes de cada parte no resulta múltiplo de los factores de diez.

Recordemos que los factores de 10 son: 10, 5, 2 y 1. Así que la suma entre los números que queden en cada corte no debe ser múltiplo de esos números.

Note que, si consideramos como división los números, el reloj está dividido en 12 partes. Para dividirlo en tres partes iguales, cada parte debe contener cuatro de esas partes dado que los cortes se hacen sobre los números. Por ejemplo,



Serían dos divisiones diferentes. Ahora bien, la división debe ser de tal forma que la suma de los números que queden entre los cortes de cada parte no resulta múltiplo de los factores de diez (10, 5, 2 y 1). Si vemos ninguna de las divisiones anteriores cumplen esa condición

12 + 1 + 2 = 15
6 + 5 + 4 = 15
10 + 9 + 8 = 27

El 15 es múltiplo de 5

1 + 2 + 3 = 6
5 + 6 + 7 = 18
9 + 10 + 11 = 30

El 6 es múltiplo de 2
El 18 es múltiplo de 2
El 30 es múltiplo de 5

Así que debemos buscar una de todas las posibles divisiones (son 12 posibilidades) que cumpla con la condición indicada

2 + 3 + 4 = 9

6 + 7 + 8 = 21

10 + 11 + 12 = 33

Las sumas anteriores cumplen la condición de no ser múltiplo de los factores de diez.

El problema nos preguntaba: ¿Cuánto suman los números en los cuáles ha realizado los cortes?

Realizamos los cortes en el 1, el 5 y el 9. Así la respuesta sería

1 + 9 + 5 = 15

La suma de los números es 15.

8. Gina tiene el triple de hermanos que de hermanas. Moisés tiene el doble de hermanos que de hermanas. Si Pablo es el padre de ambos, ¿cuántos hijos e hijas tiene Pablo?

Solución:
Como Pablo es el padre de ambos, entonces Gina y Moisés son hermanos. Analicemos la información que me dan.
- Gina tiene el triple de hermanos que de hermanas.
- Moisés tiene el doble de hermanos que de hermanas.

Consideremos en una tabla las posibilidades para cada uno de los hermanos, según la información dada. En la misma tabla calculemos el total de mujeres y hombres, en el caso de Gina le sumamos 1 a las mujeres y en el caso de Pablo le sumamos 1 a los hombres.

El total de mujeres y hombres debe coincidir para ambos pues son hermanos.

	Número de hermanas	**Número de hermanos**	**Total mujeres**	**Total hombres**
Gina (triple de hermanos que hermanas)	**1**	3	2	3
	2	6	3	6
	3	9	**4**	**9**
	4	12	5	12
Moisés (doble de hermanos que hermanas)	**1**	2	1	3
	2	4	2	5
	3	6	3	7
	4	8	**4**	**9**

Observe que cuando Gina tiene 3 hermanas y 12 hermanos, sería 4 mujeres y 9 hombres. Esa misma cantidad de hombres y mujeres se obtiene cuando Moisés tiene 4 hermanas y 8 hermanos.

Así que Pablo tiene en total 13 hijos e hijas.

9. Karla tiene un barril que estaba lleno con agua, cuando lo está vaciando, su hermano dice que le ha vaciado un 20%. Más tarde, su padre dice que está lleno al 20% y que ha vaciado 20 litros. Si ambos dicen la verdad, ¿de cuántos litros es la capacidad del barril? ¿Cuánto había vaciado Karla cuando su hermano lo vio?

Solución:
Primero el hermano de Karla dice que ha vaciado un 20%. Luego, un poco más tarde el padre de Karla dice que está lleno al 20% y ha vaciado 20 litros. Quiere decir que cuando el padre de Karla observa, se ha vaciado un 80% del barril y el 80% representa 20 litros. Supongamos que la capacidad del barril es “m”, por regla de tres tenemos:

$$\frac{20}{80} = \frac{m}{100}$$

Multiplicando en *x* tenemos

$20 \times 100 = 80 \; x \; m$

Despejamos el valor de *xm*

$\frac{2000}{80} = x \; m$

Por lo que la capacidad del barril es de 25 litros.

Que es lo mismo que decir:

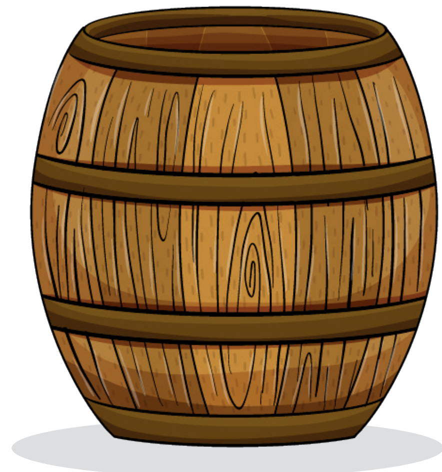
$(20 \times 100) \div 80 = m$

Recuerde que

$$\frac{20}{80} = \frac{m}{100}$$

Recuerde que multiplicamos en diagonal y dividimos este resultado por el tercer valor de la expresión

Nos falta determinar cuántos litros había vaciado Karla cuando su hermano vio el barril, él indicó que le ha vaciado un 20%. Así que como ya conocemos la capacidad del barril, entonces calculamos el 20% de 25 litros



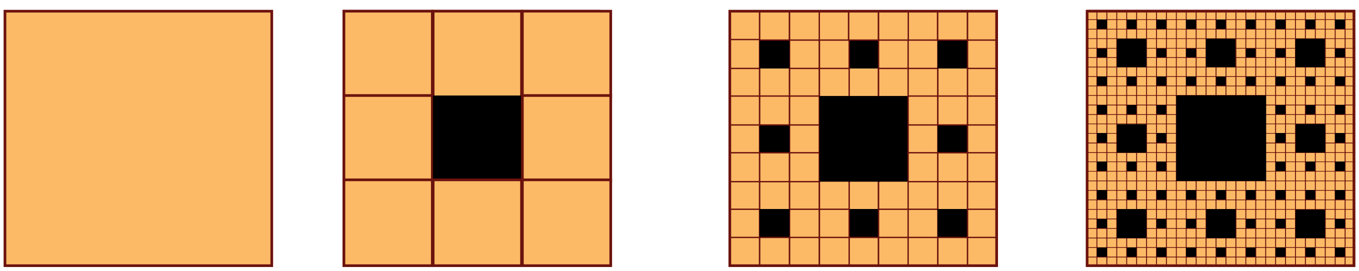
$$0,2 \times 25 = 5 \text{ litros}$$

Cuando el hermano vio, Karla había vaciado 5 litros.

10. Helena ve en el libro de matemática de su hermano, un dibujo llamado "La alfombra de Sierpinski" e intenta dibujarla, invirtiendo los colores. Cada día realiza un paso de la imagen:

• El primer día dibuja un cuadrado.
• El segundo día lo divide en nueve cuadrados iguales y elimina el central.
• El tercer día, divide todos los cuadrados restantes en nueve cuadrados iguales y elimina todos los centrales.

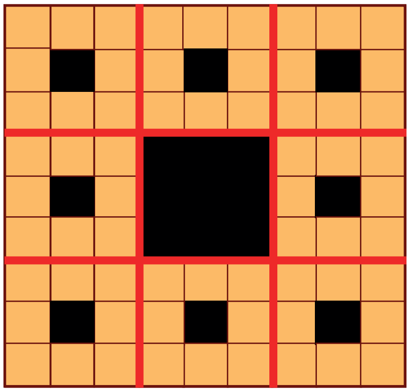
Cada día repite este paso, obteniendo la siguiente secuencia:



Día 1 **Día 2** **Día 3** **Día 4**

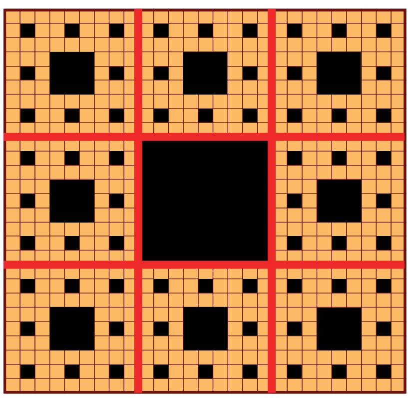
¿Cuántos cuadrados negros tendrá el día 5?

Solución:
Observe que en la figura del día 3, se tiene el cuadrado del día 2 repetido 8 veces (sería 9 con el del centro, pero los cuadrados del centro se eliminaron) y un cuadrado negro en el centro. Así el número de cuadrados negros lo podemos calcular como 8 x 1 + 1.



8 x 1 pues cada cuadrado tiene un cuadrado negro en el centro, y le sumamos el cuadrado grande del centro. Por lo que se tienen 9 cuadrados negros.

Similarmente en la figura del día 4, se tiene el cuadrado de la figura del día 3 repetido 8 veces y un cuadrado negro en el centro. Así el número de cuadrados negros lo podemos calcular como 8 x 9 + 1.

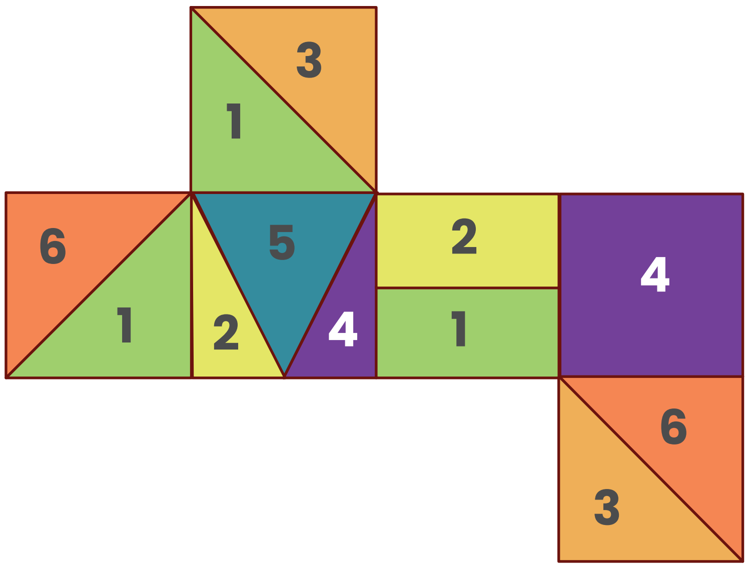


8 x 9 pues cada cuadrado tiene 9 cuadrado negros, y le sumamos el cuadrado grande del centro. Por lo que se tiene 73 cuadrados negros.

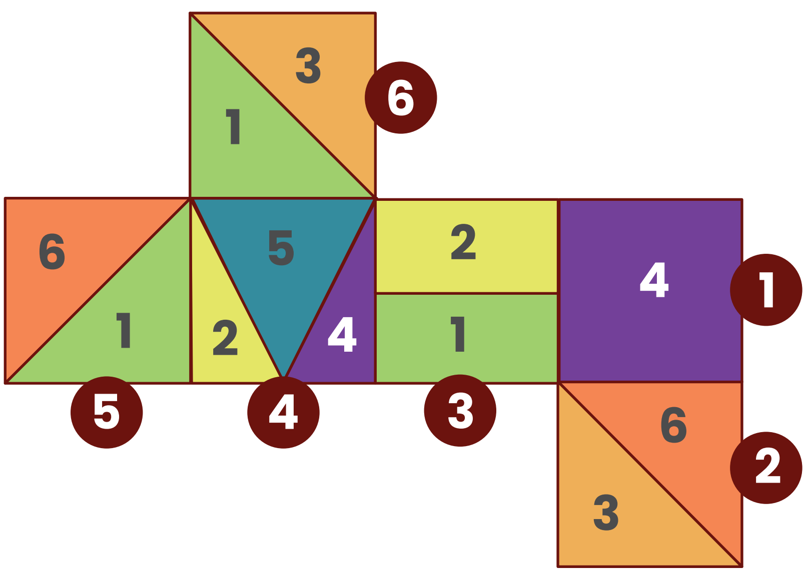
La figura del día 5 tendría 8 cuadrados similares al cuadrado de la figura del día 4, más el cuadrado del centro. Es decir, 8 x 73 + 1.

El día 5 tendría en total 585 cuadrados negros.

11. Miguel desarma un cubo de cartón, como se muestra en la siguiente imagen. Al cerrar el cubo, ¿cuáles números quedarán junto a los dos lados restantes de la cara que solo tiene el número cuatro?



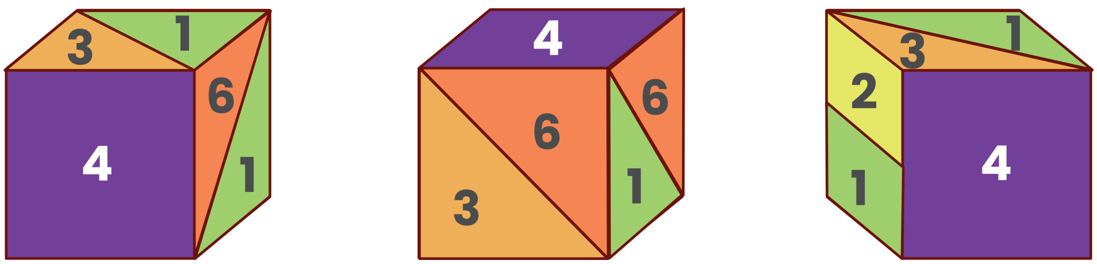
Solución:
Numeremos las caras para una mejor identificación.



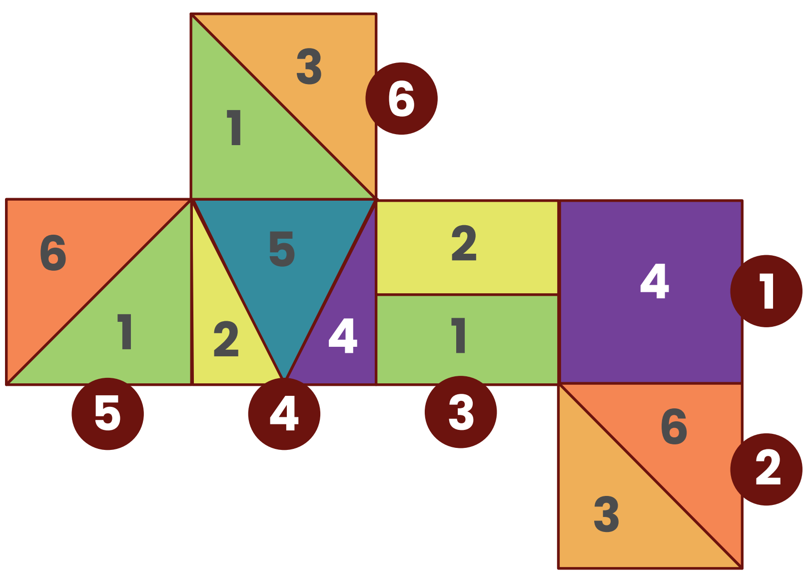
Note que al cerrar el cubo las caras opuestas son:

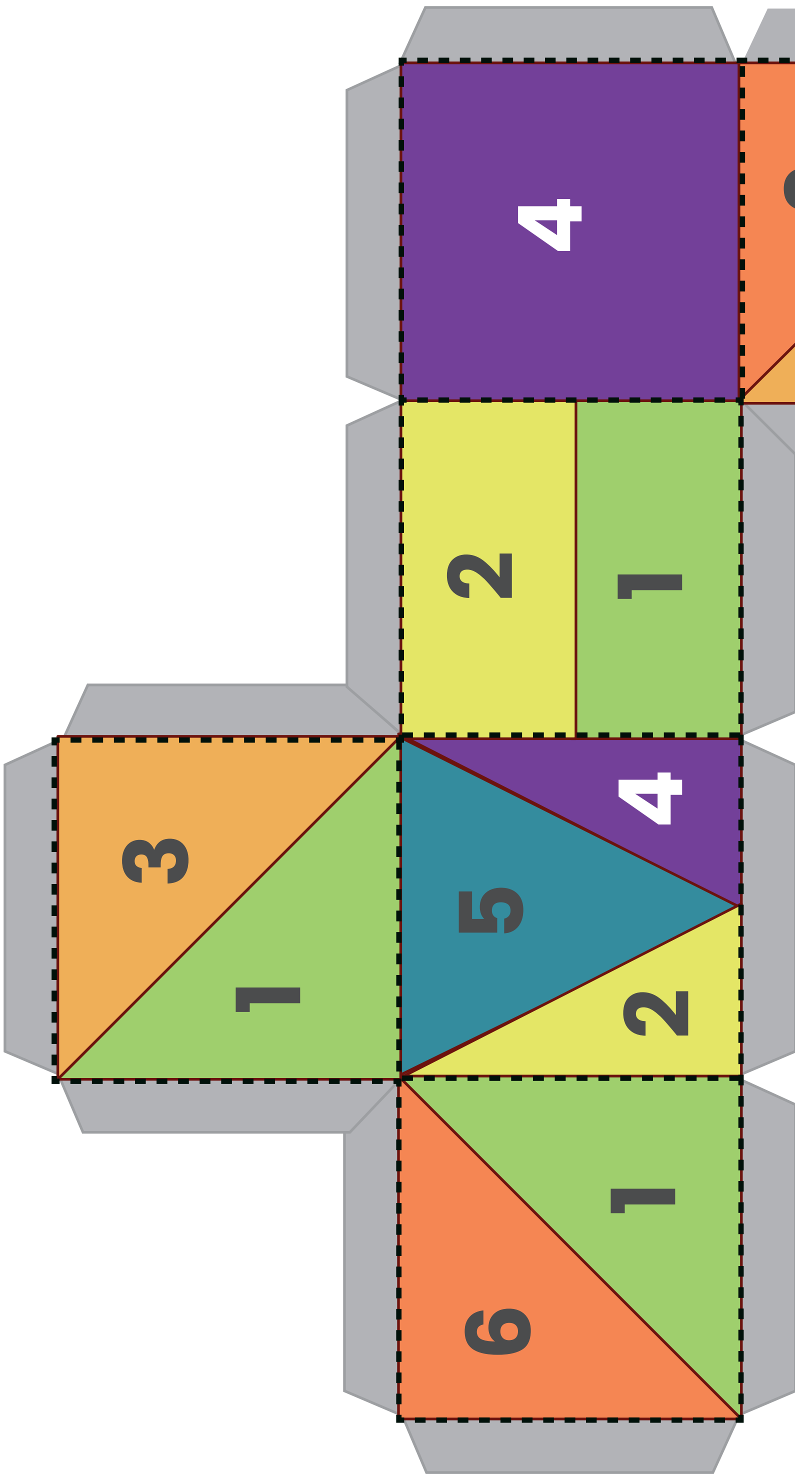
- 2 y 6
- 3 y 5
- 1 y 4

Las caras que tienen arista en común con la cara del 4 son: 2, 3, 5 y 6; como podemos observar en las figuras siguientes



Además de las caras 2 y 3, tenemos las 5 y 6. Así que en los lados restantes quedan los números 6 (de la cara 5) y 3 (de la cara 6).





Recuerda recortar por las partes grises y luego doblar por la línea discontinua para armar el cubo.

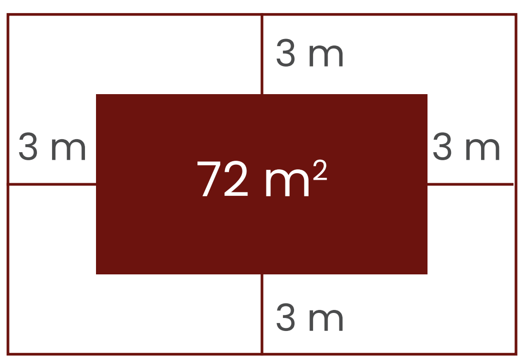
12. Una habitación rectangular tiene justo en el centro una alfombra, también rectangular, que dista de las paredes de la habitación 3 m en todos sus lados. La alfombra tiene 72 m² de área, el largo mide el doble que el ancho. ¿Cuál es el área de la habitación?

Recuerde que el doble de una cantidad es ella misma dos veces, por ejemplo:

El doble de 2 es 4	4 es igual a 2 + 2
El de 3 es 6	6 es igual a 3 + 3

También podemos multiplicar el número por 2 para determinar su doble.

Solución:
Hagamos una representación gráfica de la situación planteada



Además, se sabe que el largo de la alfombra mide el doble que el ancho. Supongamos **a** es el ancho de la alfombra, entonces **2a** es el largo y el área la calculamos de la forma siguiente:

$$A = \text{largo x ancho} = 2\,a \cdot a$$

Lo que equivale a decir:

$$A = \text{largo x ancho} = 2\,a^2$$

Sabemos que el área de la alfombra es 72 entonces tenemos que

$$72 = 2\,a^2$$

Para resolver esta ecuación, pensemos que número elevado al cuadrado y luego multiplicado por dos nos da como resultado 72.

Podemos ir probando, probemos el valor de a=5

$2 \times 5^2 = 50$

En este caso no nos funciona, da como resultado un número menor que el requerido, vamos a probar el valor de a = 6

$2 \times 6^2 = 72$

¡Muy bien! Con a = 6 el resultado de la operación es 72.

Hay algo que verás en secundaria que se llaman operaciones inversas que te ayudará a resolver las ecuaciones de una manera más rápida.

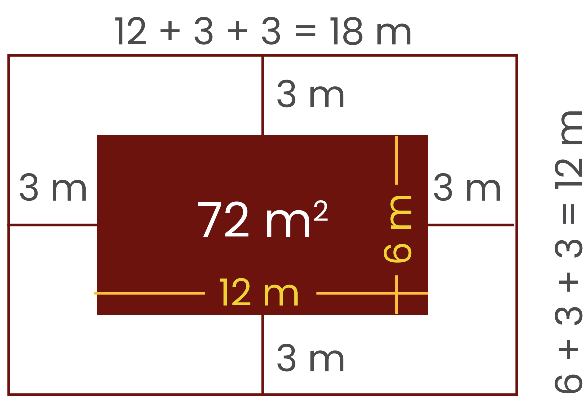
Otra manera de resolver la ecuación podría ser:

Dividimos por dos ambos lados obteniendo

$$36 = a^2$$

Ahora buscamos el número natural que elevado a la 2 de 36, y tenemos que es 6. Por lo que el ancho de la alfombra mide 6 y el largo 12.

Con esta información y sabiendo que la alfombra dista de las paredes de la habitación 3 m, podemos calcular las dimensiones de la habitación



Así que el ancho de la habitación es 12m y el largo 18m. Por lo que su área es:

$$A = 12 \times 18 = 216 \text{ m}^2$$

13. Mariana y sus seis amigas tenían una pijamada, en la cual iban a ver una película, pero para decidir entre dos de sus favoritas (**A** y **B**) realizaron una votación, en la que ganó la película B por un voto.

¿En cuántos órdenes posibles pueden haberse emitido dichos votos, de forma que, en todo momento de la votación, la delantera la llevara la película ganadora?

Solución:
Según el enunciado la película **B** ganó por un voto. Como en total votaron 7 personas (Mariana y sus seis amigas), el resultado de la votación fue 4 y 3. Pues son dos números que sumados dan 7 y la diferencia entre ellos es 1.

Para que en todo momento la delantera la lleve la película **B**, los dos primeros votos deben ser por la película **B**.

Voto 1	Voto 2
B	**B**

Para el voto 3 se tienen las dos posibilidades, como se muestra a continuación.

Opción	Voto 1	Voto 2	Voto 3	Resultado
1	**B**	**B**	**A**	Película A: 1 Película B: 2
2	**B**	**B**	**B**	Película A: 0 Película B: 3

Si consideramos la primera opción de la tabla anterior, el cuarto voto no pudo haber sido por la película **A** porque no llevaría la delantera la película B, así que la única opción es **B**. Para la segunda opción si se tienen las dos posibilidades, como se muestra a continuación

Opción	Voto 1	Voto 2	Voto 3	Voto 4	Resultado
1	B	B	A	B	Película A: 1 Película B: 3
2	B	B	B	A	Película A: 0 Película B: 3
3	B	B	B	B	Película A: 0 Película B: 4

Consideremos ahora el voto 5. Si consideramos la primera opción de la tabla anterior, se tiene las dos posibilidades para el voto 5: **A** o **B** pues en los dos casos **B** continúa llevando la delantera. Similarmente para la segunda opción. En la tercera opción solo hay una posibilidad pues la película **B** obtuvo 4 votos, y ya estarían los 4 votos. Así que para esa opción el quinto voto sería para **A**.

Opción	Voto 1	Voto 2	Voto 3	Voto 4	Voto 5	Resultado
1	B	B	A	B	A	Película A: 2 Película B: 3
2	B	B	A	B	B	Película A: 1 Película B: 4
3	B	B	B	A	A	Película A: 2 Película B: 3
4	B	B	B	A	B	Película A: 1 Película B: 4
5	B	B	B	B	A	Película A: 1 Película B: 4

Continuando con el voto 6, tenemos que en todas las opciones en las que **B** tiene 4 votos (opciones 2, 4 y 5) entonces el voto 6 fue por **A**. Note que la primera opción, el voto 6 no puede ser de **A**, porque **B** no llevaría la delantera, entonces es de **B**. Similarmente en la tercera opción.

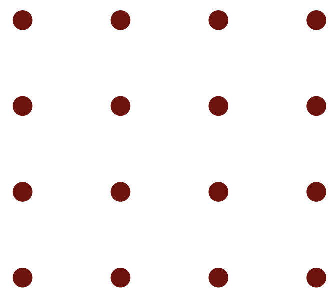
Voto 1	Voto 2	Voto 3	Voto 4	Voto 5	Voto 6	Resultado
B	**B**	**A**	**B**	**A**	**B**	Película A: 2 Película B: 4
B	**B**	**A**	**B**	**B**	**A**	Película A: 2 Película B: 4
B	**B**	**B**	**A**	**A**	**B**	Película A: 2 Película B: 4
B	**B**	**B**	**A**	**B**	**A**	Película A: 2 Película B: 4
B	**B**	**B**	**B**	**A**	**A**	Película A: 2 Película B: 4

En todos los casos de la tabla anterior solo hay una opción para el voto 7, para cumplir que **A** tenga 3 votos y **B** tenga 4 votos. El voto 7 fue para **A** en cualquiera de las opciones. Así, los órdenes posibles en los que pudo haberse emitido los votos se muestran en la tabla siguiente.

Voto 1	Voto 2	Voto 3	Voto 4	Voto 5	Voto 6	Voto 7	Resultado
B	**B**	**A**	**B**	**A**	**B**	**A**	Película A: 3 Película B: 4
B	**B**	**A**	**B**	**B**	**A**	**A**	Película A: 3 Película B: 4
B	**B**	**B**	**A**	**A**	**B**	**A**	Película A: 3 Película B: 4
B	**B**	**B**	**A**	**B**	**A**	**A**	Película A: 3 Película B: 4
B	**B**	**B**	**B**	**A**	**A**	**A**	Película A: 3 Película B: 4

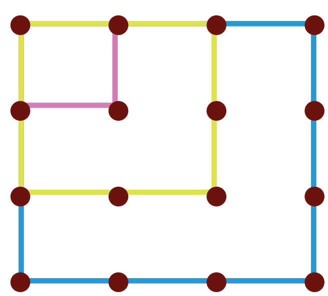
Por lo tanto, se tienen 5 órdenes posibles.

14. ¿Cuál es la mayor cantidad de cuadrados de distinto perímetro que pueden construirse, tomando como vértices los puntos de la siguiente imagen?

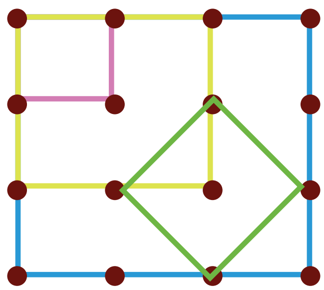


Solución:
Note que podemos formar un cuadro cuyo lado sea la distancia entre dos puntos consecutivos horizontalmente (o vertical). Luego otro cuyo lado sea el segmento que une tres puntos horizontalmente (o vertical). Y similarmente, un cuadrado cuyo lado sea el segmento que une cuatro puntos horizontalmente (o vertical).

En la siguiente imagen se muestran los cuadros formados con colores diferentes:

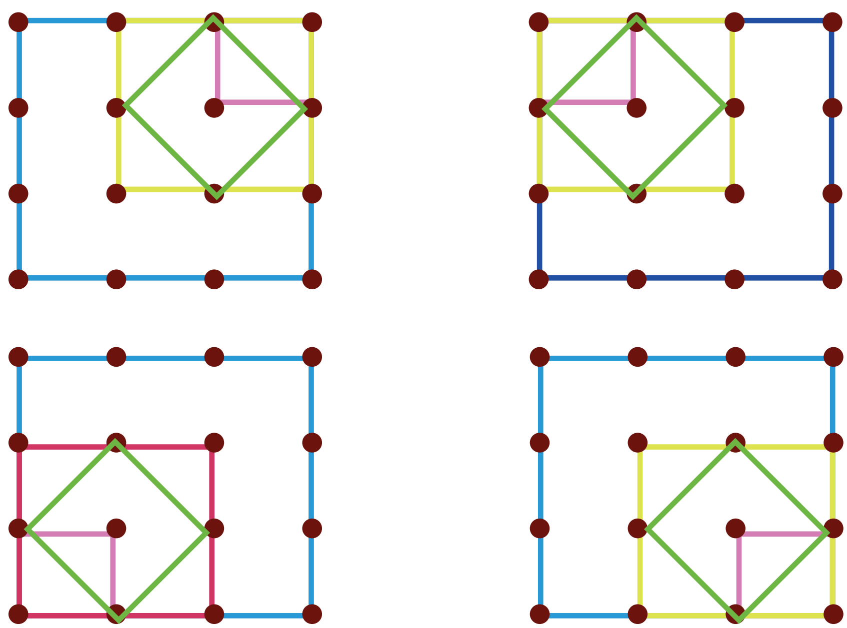


Además, hay una cuarta opción: el cuadrado que une dos puntos en diagonal como se muestra a continuación



Así que la mayor cantidad de cuadrados es 4.

Sin embargo si queremos formar más cuadrados en otras posiciones, pero del mismo perímetro que los anteriores, tenemos la siguiente opción:

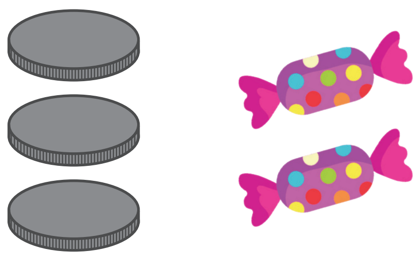


En el caso del cuadrado de color rojo son 9 posiciones diferentes, aquí apreciamos solo 4 en diferente posición

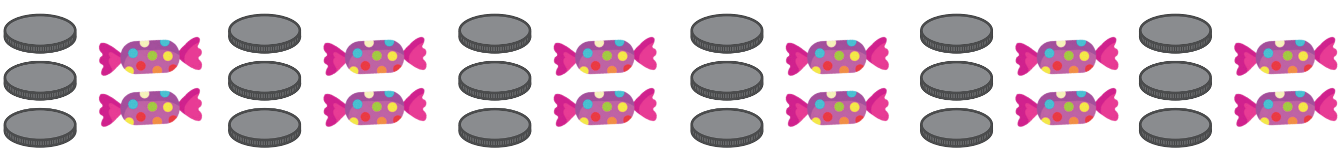
15. Aurora tiene la misma cantidad de fichas que de caramelos, luego juega en una máquina en la que cada tres fichas insertadas, gana dos caramelos. Después de ganar por sexta vez tiene 30 caramelos, ¿cuántas fichas tenía después de insertar la cuarta ficha?

Solución:

Tenemos que Aurora gana dos caramelos cada vez que inserta tres fichas, así tenemos la relación:



Si Aurora ha ganado 6 veces, entonces ha ganado 12 caramelos pues cada vez que gana, ella recibe 2 caramelos.



Si en total tiene 30 caramelos, entonces quiere decir que antes de jugar tenía 18 caramelos, pues a 30 le restamos los 12 caramelos que ha ganado.

Si antes de jugar tenía 18 caramelos entonces tenía 18 fichas, así después de insertar la cuarta ficha le quedarían 14 fichas más.

16. Noel, sus dos padres y sus hermanos van al parque de diversiones a celebrar su cumpleaños número once. En la entrada ofrecen dos opciones:

• Opción 1: Pagar a todos los miembros de la familia el pase de adultos, que cuesta ₡ 7000, y le harán un 20% de descuento.
• Opción 2: Comprar pase de adulto a los mayores de 12 años y a los niños el pase infantil, que cuesta ₡ 3700. Haciendo esto gastaría en total ₡ 39 100.

¿Cuál de las afirmaciones es verdadera?
a) Noé tiene tres hermanos.
b) Es más económico tomar la opción 1.
c) Dos de los hermanos son mayores que Noé.

Solución:
De la información dada sabemos que hay 2 adultos (los padres de Noé) y un niño (Noé). Sobre los hermanos de Noé por el momento no sabemos cuántos son y si son menores o mayores de 12 años.

De la opción 1 y 2 tenemos los precios de las entradas:
- Pase adulto: ₡ 7000
- Pase infantil: ₡ 3700

Si consideramos la opción 1, no podemos saber el precio total porque no tenemos información de los hermanos de Noé. Entonces analicemos la opción 2.

Sabiendo el precio de los pases para adultos y el pase infantil, además, de conocer el costo total que nos dan en la opción 2, podemos hacer algunos cálculos. Por ejemplo, podemos calcular el costo en colones de los pases para los padres, el costo total de los hermanos de Noé, como se muestra a continuación

Dinero en colones			
Costo total	**Costo Noé**	**Costo padres**	**Costo hermanos**
39 100	3 700	14 000	39 100 – 14 000 – 3 700 = 21 400

Así que el costo total en las entradas de los hermanos de Noé fue de ₡ 21 400. Consideremos las diferentes opciones que tenemos considerando el costo anterior.

- Consideremos que todos los hermanos son menores de 12 años, lo cual no puede ser pues si son 5 hermanos el costo sería 5 x 3700 = 18 500 y si son 6 hermanos el costo sería 6 x 3700 = 22 200.

- Consideremos que todos los hermanos son mayores de 12 años, lo cual no puede ser pues si son 3 hermanos el costo sería 3 x 7000 = 21 000 y más de 3 ya se pasa del costo ₡ 21 400.

La información anterior la podemos resumir en una tabla

Cantidad de hermanos menores de 12 años	Cantidad de hermanos mayores de 12 años	Costo (₡ 21 400)
5	0	18 500
6	0	22 200
0	3	21 000

Por lo que podemos decir, que los hermanos de Noé no son todos menores de 12 años ni todos mayores de 12 años.

Ahora tenemos que pensar en combinaciones

- Consideremos que tiene 1 hermano mayor de 12 años, cuyo pase sería ₡ 7000. El resto 21 400 – 7000 = 14 400 sería en pases de niños menores de 11 años. Si fueran 3 hermanos menores de 11 años los pases de ellos costarían ₡ 11 100 (3700 x 3 = 11 100) y si fueran 4 el costo sería ₡ 14 800 (3700 x 4 = 14 800). Por lo que no es posible que solo un hermano sea mayor de 12 años.

- Consideremos que tiene 2 hermanos mayores de 12 años, para los cuales el costo de los pases sería ₡ 14 000. El resto 21 400 – 14 000 = 7 400 sería en pases de niños menores de 11 años. Si fueran 2 hermanos menores de 11 años los pases de ellos costarían justamente ₡ 7 400

La información anterior la podemos resumir en una tabla

Cantidad de hermanos menores de 12 años	Cantidad de hermanos mayores de 12 años	Costo (₡ 21 400)
1	3	7000 + 11000= 18 100
1	4	7000 + 14 800 = 21 800
2	2	14 000 + 7 400 = 21 400

Por lo tanto, Noé tiene 2 hermanos mayores de 12 años y dos hermanos menores de 12 años. En total, Noé tiene 4 hermanos por lo que la opción **a)** es falsa. Dos de los hermanos de Noé son mayores de 12 años, por lo que son mayores que Noé. Así la opción **c) es verdadera.**

Igual verifiquemos que la opción b) es falsa para asegurar que nuestra respuesta es correcta.

Con la cantidad de hermanos podemos calcular el costo de escoger la primera opción.

La primera opción consiste en que todos paguen el pase de adultos, que cuesta ₡ 7000, y al costo total le aplicarán un 20% de descuento. El total de personas es 7 pues son: los padres de Noé, Noé, 2 hermanos mayores de 12 años y dos hermanos menores de 12 años. Así el costo total es:

$$7000 \times 7 = 49\,000$$

Calculamos el descuento de 20%

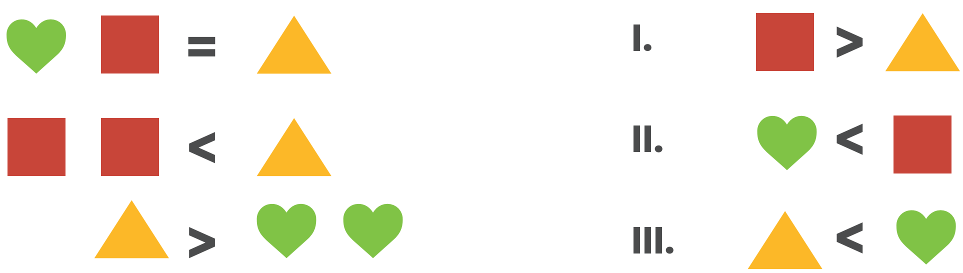
$$0{,}2 \times 49\,000 = 9800$$

El precio final sería

$$49\,000 - 9\,800 = 39\,200$$

Por lo que no es más económica que la segunda opción.

17. Observe las relaciones establecidas entre las figuras de la izquierda y con base en ellas determine cuál de las afirmaciones, de la derecha, es verdadera:



a) Afirmación I. **b)** Afirmación II. **c)** Afirmación III.

Solución:

Sobre la afirmación III:

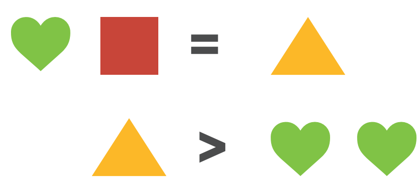
Sabemos que

Entonces

Por lo que la opción I es falsa

En cuanto a la afirmación II:

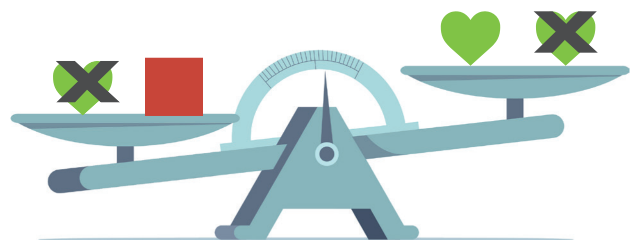
Como sabemos que

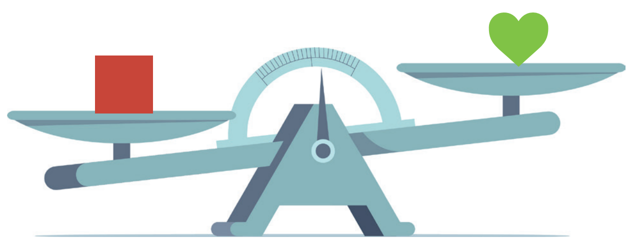


Entonces sustituyendo el triángulo tenemos

Si pensamos en una balanza y quitamos de ambos lados de la balanza el mismo peso, la balanza se mantiene. En este caso quitamos de ambos lados un corazón tenemos

Si usáramos una balanza:





Así que la afirmación **II es verdadera**.

18. Se está planeando construir una piscina con base rectangular en el jardín de la casa de Pepe, su papá tiene los planos listos y dice que tendrá una capacidad de 29 200 litros. Pepe quiere convencerlo de duplicar sus tres dimensiones. Si Pepe logra convencer a su padre, ¿cuál sería, en litros, la nueva capacidad de la piscina?

Solución:
La capacidad de la piscina la calculamos como

$$V = \text{largo} \times \text{ancho} \times \text{profundidad}$$

Supongamos que las medidas de los planos que tiene el papá de Pepe son

$$\text{largo} = \mathbf{a},\ \text{ancho} = \mathbf{b} \text{ y profundidad} = \mathbf{p}$$

Entonces la capacidad es $V = a \times b \times p$. Conociendo que tendrá una capacidad de 29 200 litros tenemos que

$$29\,200 = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{p}$$

Pepe quiere una piscina que duplique cada una de esas dimensiones, es decir,

$$\text{largo} = 2 \times \mathbf{a},\ \text{ancho} = 2 \times \mathbf{b} \text{ y profundidad} = 2 \times \mathbf{p}$$

Por lo que la piscina que propone Pepe tendría una capacidad dada por

$$VP = (2 \times \mathbf{a}) \times (2 \times \mathbf{b}) \times (2 \times \mathbf{p})$$

Recordando que la multiplicación es conmutativa y asociativa

Recuerde que :

Conmutividad: el orden en que se multiplique no altera el resultado.

$$a \times b = b \times a$$

Asociatividad: la forma en la que agrupamos los factores en una multiplicación no altera el resultado

$$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$$

Tenemos que

$$VP = (2 \times 2 \times 2) \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{p}) = 8 \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{p})$$

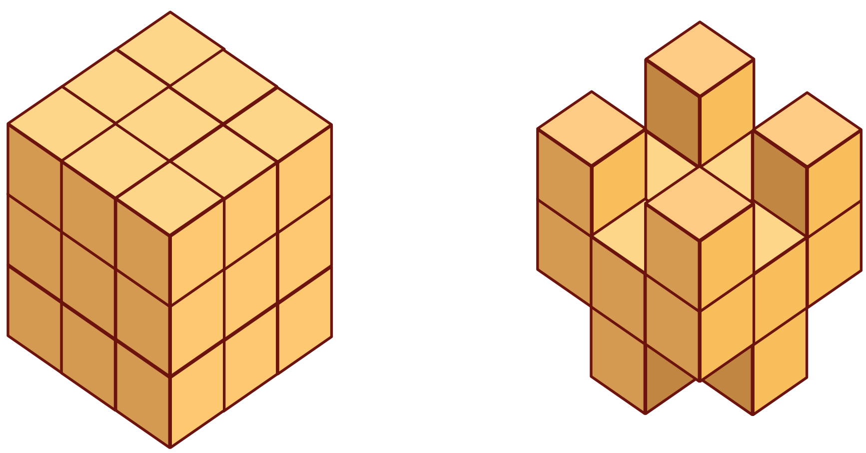
Como sabemos que 29 200 = **a** x **b** x **p** entonces

$$VP = 8 \times (29\,200) = 233\,600$$

La capacidad de la nueva piscina sería de 233 600 litros.

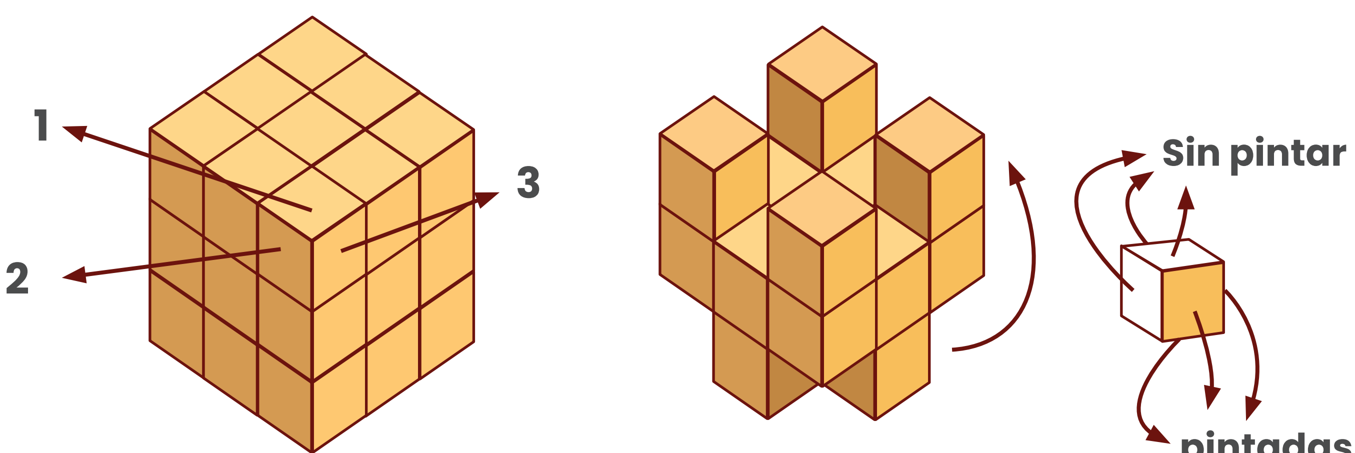
19. Emma arma un bloque con 27 cubos de madera y pinta todo el exterior de su estructura de color naranja. Luego decide quitar los cuatro cubos de las esquinas de la parte inferior y, sin girarlos, colocarlos sobre las esquinas de la cara superior, obteniendo la segunda estructura que se muestra en la imagen.

¿Cuántas caras de cubos tuvo que pintar Emma de naranja después de realizar ese movimiento?



Solución:

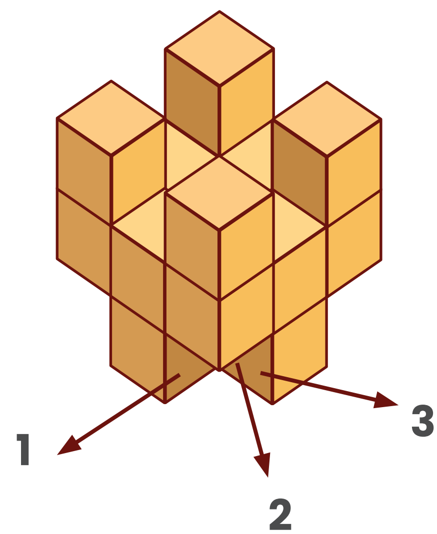
Note que todos los cubos de las esquinas tienen pintadas tres caras.



Estructura 1 **Estructura 2**

Si trasladamos cada cubo de las esquinas inferiores hacia arriba, sin girarlos, al colocarlo en la parte superior una de las caras pintadas quedará cubierta y faltaría de pintar 3 caras, pues las 3 caras que no estaban pintadas quedan descubiertas en la parte superior.

Similarmente, al quitar el cubo quedan 3 caras sin pintar, las caras de los cubos adyacentes al de la esquina.



Así que por cada cubo que se traslade hay que pintar 3 caras del cubo en la parte de arriba y 3 caras que quedaron descubiertas en la parte de abajo, un total de 6 caras. Como son 4 cubos los que se trasladan entonces en total hay que pintar

$$4 \times 6 = 24 \text{ caras}$$

20. ¿Cuántos números hay, menores a 250, cuyos dígitos sumen 15?

Solución:
Una forma de resolver el ejercicio sería escribir todos los números del 1 al 250 y ver cuáles satisfacen la condición.

Otra forma es primero pensar en los números de dos dígitos tales que la suma de esos dos dígitos sea 15, para esto pensemos en dos números entre 0 y 9 que sumados de 15: 6 y 9, 7 y 8. Con esos dígitos formamos los números:

69, 96, 78, 87

Ahora pensemos en los números de tres dígitos, iniciemos con los números entre 100 y 199, todos estos números tendrán un 1 en las centenas. Así que la suma de las decenas y unidades debe ser 14, para la suma total sea 15. Pensemos en dos números entre 0 y 9 que sumados de 14: 9 y 5, 6 y 8, 7 y 7. Con un 1 en las centenas y esos dígitos en las decenas y unidades formamos los números:

159, 195, 168, 186, 177

Continuemos ahora con los números entre 200 y 250, todos estos números tendrán un 2 en las centenas. Así que la suma de las decenas y unidades debe ser 13. Pensemos en dos números entre 0 y 9 que sumados de 13: 4 y 9, 5 y 8, 6 y 7. En este caso no hay muchos números que podemos formar puesto que sería mayores que 250. El único número es:

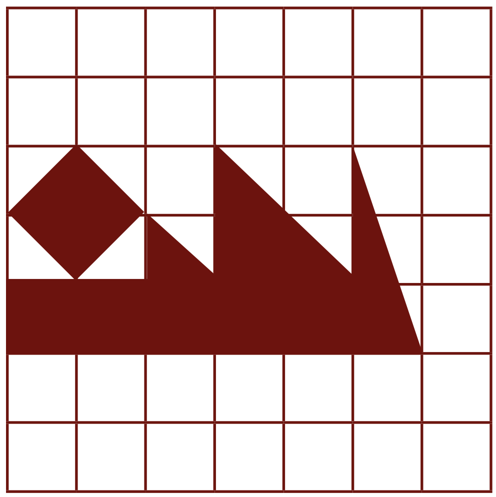
249

Así que los números menores a 250, cuyos dígitos suman 15 son:

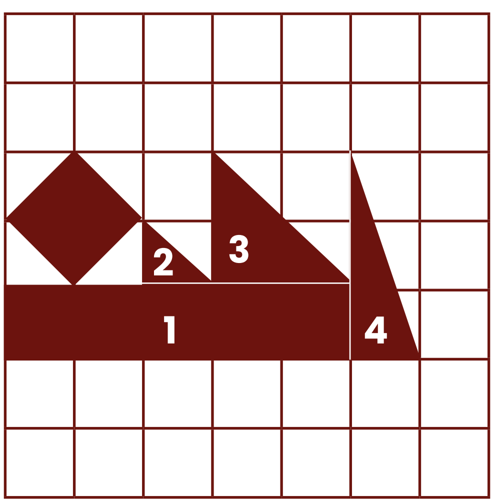
69, 96, 78, 87, 159, 195, 168, 186, 177, 249

En total tenemos 10 números.

21. Josefina realiza sobre un papel cuadriculado el dibujo que se muestra en la imagen, si cada cuadrito del papel cuadriculado tiene 2 cm de lado, ¿cuál es el área, en centímetros cuadrados, de la figura realizada por Josefina?



Solución:
Dividamos la figura en figuras geométricas para las cuáles sabemos calcular su área: cuadrados, rectángulos y triángulos.



Recordemos que la medida de la longitud de cada cuadrito es de 2 cm.

El área del rectángulo la calculamos como A1 = base x altura

A1 = 5 cuadritos de base x 1 cuadrito de altura

A1 = 10 x 2 = 20 cm^2

El área de cada triángulo lo calculamos como

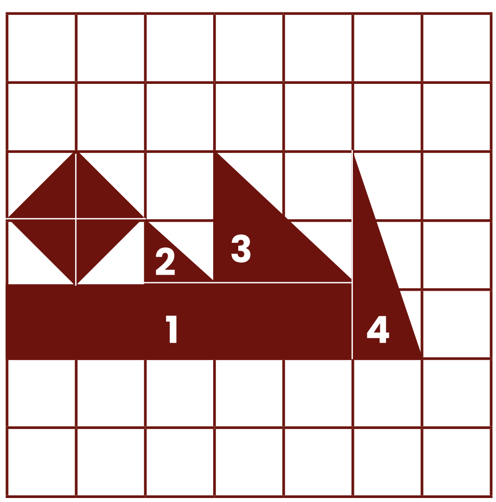
$$\text{ATriángulo} = \frac{\text{base x altura}}{2}$$

$$A2 = \frac{2 \times 2}{2} = 2\ cm^2,$$

$$A3 = \frac{4 \times 4}{2} = 8\ cm^2$$

$$A4 = \frac{2 \times 6}{2} = 6\ cm^2$$

La otra figura es un cuadrado, pero no conocemos la medida del lado. Así que para calcular su área lo dividimos en 4 triángulos iguales



El área de cada triángulo es

$$\frac{2 \times 2}{2} = 2\ cm^2$$

Para obtener el área el cuadrado, multiplicamos por 4 el área de cada triángulo. Así que el área del cuadrado es

$$A5 = 4 \times 2 = 8\ cm^2$$

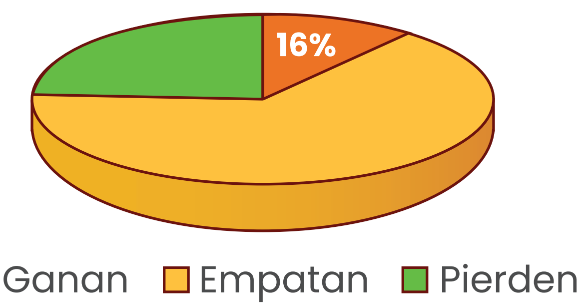
El área de la figura completa es

$$A = 20 + 2 + 8 + 6 + 8 = 44\ cm^2$$

22. El equipo de fútbol de Escuela La Lía ha jugado 50 partidos en los juegos estudiantiles. Con base en la información del gráfico circular y en la tabla, determine cuántos partidos perdieron.

	Partidos
Ganados	
Empatados	30
Perdidos	

Resultados de los partidos



Solución:
Según la información del gráfico, el equipo ha ganado el 16% de los partidos. Si conocemos que han jugado 50 partidos, podemos calcular cuántos partidos han ganado calculando el 16% de 50

$$0{,}16 \times 50 = 8$$

Con esta información ya podemos ir completando la tabla:

	Partidos
Ganados	8
Empatados	30
Perdidos	

Ya tenemos 38 partidos y el total son 50, por lo que la diferencia corresponde a la cantidad de partidos perdidos.

	Partidos
Ganados	8
Empatados	30
Perdidos	12

El equipo ha perdido 12 partidos.

23. Pablo inventa un código en el que asigna a cada letra un valor numérico que corresponde a un número natural, menor a diez y escribe las siguientes equivalencias: PAO = 30, TAP = 105 y TAO = 70. En las cuales el resultado se obtiene multiplicando los valores de cada una de las letras. Según el código inventado por Pablo, ¿a cuál valor numérico sería equivalente la palabra PATO?

Solución:
Se tienen las equivalencias

PAO = 30, TAP = 105 y TAO = 70

Donde el resultado se obtiene multiplicando los valores de cada una de las letras entonces como se tiene que TAP = 105 entonces PAT = 105, dado que la multiplicación es conmutativa.

Sabemos que cada letra representa un valor numérico que corresponde a un número natural menor a 10, busquemos posibles valores conociendo que PAO = 30. Si buscamos los factores de 30 son: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30. Combinemos 3 que multiplicados den 30 y sean menores que 10.

P	A	O	PAO	TAP
2	3	5	30	6T
2	5	3	30	10T
3	2	5	30	6T
3	5	2	30	15T
5	2	3	30	10T
5	3	2	30	15T

De las opciones anteriores las que dan TAP = 6T y TAP = 10T se descartan puesto que sabemos que TAP = 105 por lo que se tendría 6T = 105 y 15T = 105 lo cual no puede suceder puesto que ni 6 ni 10 son factores de 105. Por el contrario, los casos TAP = 15T si pueden suceder pues se tiene 15T = 105 y 15 si es factor de T pues 15 x 7 = 105, y tendríamos que T = 7.

Observe en la tabla que los dos casos en que se tiene TAP = 15T el valor de la O es 2, ya con esto podemos calcular el valor de PATO pues sabíamos que PAT = 105. Multiplicando por O a ambos lados de la igualdad

$$\text{PATO} = 105 \times \text{O} = 105 \times 2 = 210$$

Ya tendríamos resuelto el ejercicio. Ahora bien, busquemos el valor de cada letra sabiendo que T = 7 y TAO = 70. Teníamos dos opciones

P	A	O	PAO	TAP
3	5	2	30	15T
5	3	2	30	15T

Para esas dos opciones tenemos

P	A	O	PAO	TAP	TAO
3	5	2	30	15 X 7 = 105	70
5	3	2	30	15 X 7 = 105	42

Por lo que A = 5, O = 2, P = 3 y T = 7.

24. María escribe un cuento para su tarea de Español.

• En una primera revisión corrige, pero se le escapan un 60% de sus errores.
• Su madre le realiza una segunda revisión, pero se le escapan un 40% de los errores.

Al entregar su tarea, la maestra determina que tiene 6 errores, ¿cuántos errores tenía María al inicio?

Solución:
Tenemos que cuando la maestra revisa, María tiene 6 errores. Estos 6 errores corresponden al 40% de errores que se le escaparon a la mamá después de la segunda revisión. Entonces podemos calcular cuántos errores había en el momento que la mamá revisa, para esto usamos regla de tres. Supongamos que había x errores cuando la mamá revisó que corresponden al 100% de los errores, entonces

$$\frac{6}{40} = \frac{x}{100}$$

Entonces $600 = 40x$ y entonces $x = \frac{600}{40} = 15$. Por lo que, había 15 errores en el momento que la mamá de María hace la revisión.

Esos 15 errores que había cuando la mamá hace la revisión corresponden al 60% de errores que se le escaparon a María después de la primera revisión. Entonces podemos calcular cuántos errores había en el momento que María hace la revisión, muy similar al cálculo anterior. Supongamos que había y errores cuando María revisó

$$\frac{15}{60} = \frac{y}{100}$$

Entonces $1500 = 60x$ y entonces $x = \frac{1500}{60} = 25$. Por lo que, había 25 errores al inicio.

Analicemos la respuesta de otra manera:
El siguiente cuadro representa el 100% de los errores

En la primera proposición se indica que:

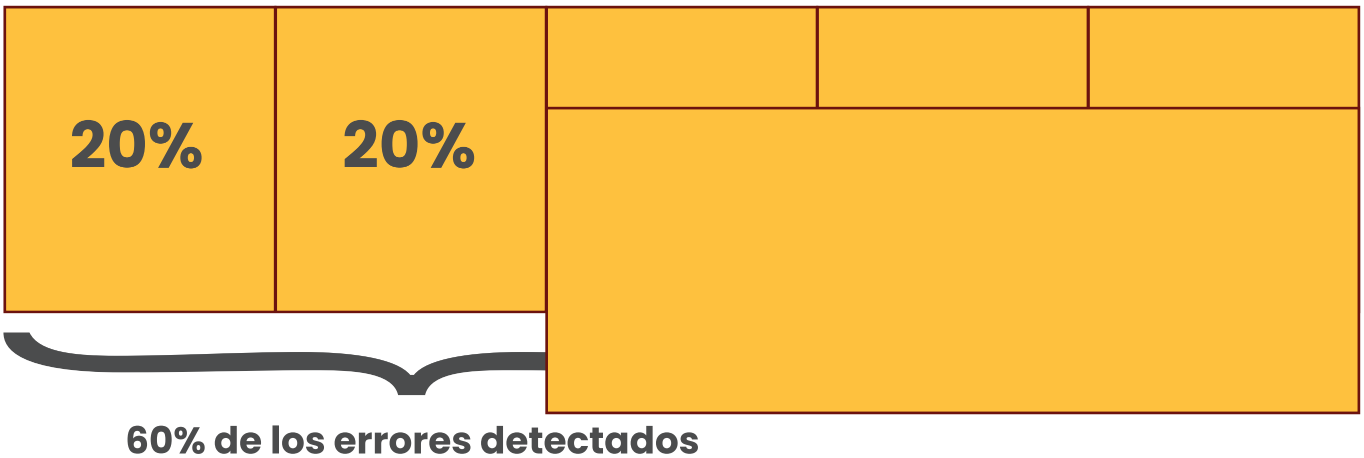
• En una primera revisión corrige, pero se le escapan un 60% de sus errores.

De acuerdo con lo anterior, se corrigió un 40 % de los errores, por lo que el cuadro lo dividiremos en cinco partes iguales, las cuales representa un 20% de los errores cada una.

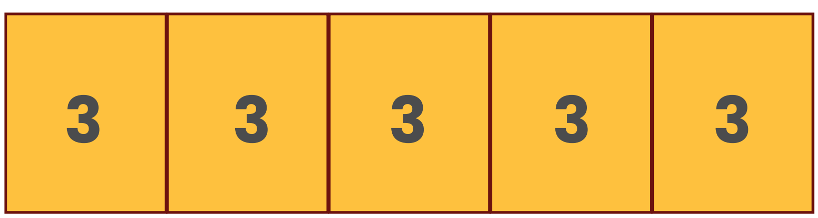
• Su madre le realiza una segunda revisión, pero se le escapan un 40% de los errores.

Esta segunda revisión la trabajaremos sobre el 60% que sobro del cuadro anterior, el cual dividiremos en 5 partes de igual tamaño

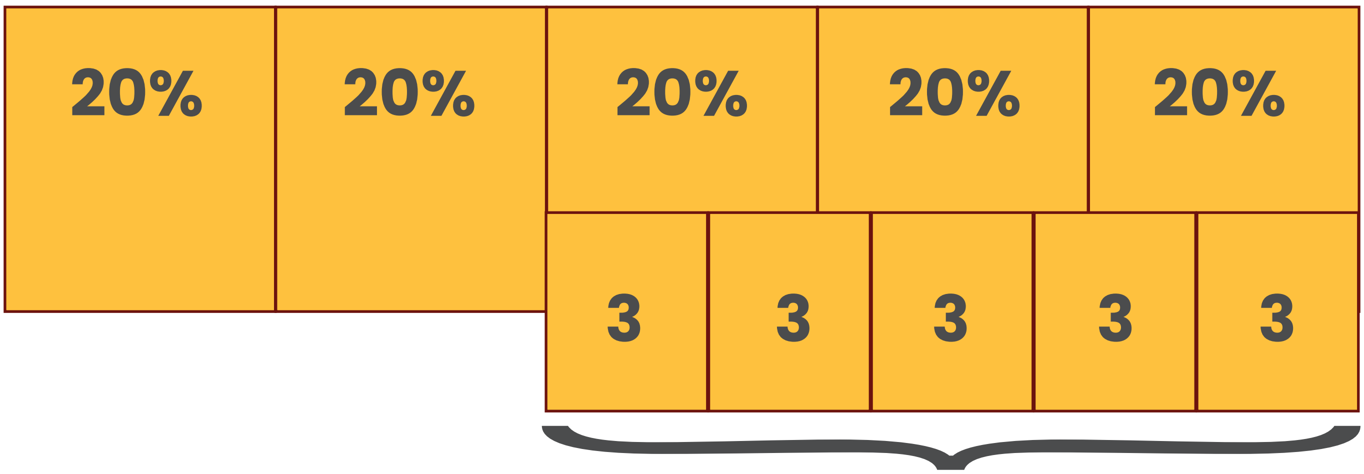
Cada una de estas partes representa un 20%, de los cuales, a la mamá se le escapó un 40% de los errores, lo que quiere decir que reviso un 60% de los mismos



Después se indica que al entregar su tarea, la maestra determina que tiene 6 errores, con esto último tenemos que el 40% de errores que quedaron corresponde a 6 errores, por lo que cada 20% anterior equivale a 3 errores, como se muestra

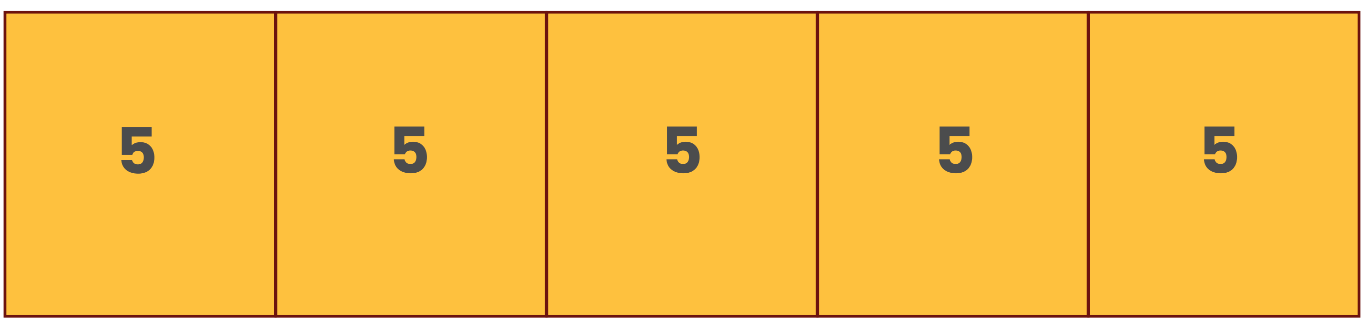


Con lo anterior, antes de la segunda revisión, se tenían 15 errores, pasemos esa información al cuadro correspondiente:



Este 60% corresponde a 15 errores, por lo que cada 20% equivale a 5 errores

De acuerdo con lo anterior tenemos que:



Al igual que con el método anterior, determinamos que la tarea de Español tenía 25 errores.

25. A partir de los múltiplos de seis, Mireya creó una secuencia de números enteros. Para obtener los números de la secuencia tomó un número, le restó un tercio de sí mismo y luego le sumó un medio de sí mismo. Continuó así calculando términos de la secuencia hasta llegar al número 84, ¿a qué término de la secuencia corresponde?

Solución:
Primero escribamos algunos de los múltiplos de 6

6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84

A cada número le restamos un tercio de sí mismo y luego le sumamos un medio de sí mismo

Término	Múltiplos de 6	Secuencia
1	6	6 – 2 + 3 = 7
2	12	12 – 4 + 6 = 14
3	18	18 – 6 + 9 = 21
4	24	24 – 8 + 12 = 28
5	30	30 – 10 + 15 = 35

Podemos continuar con la tabla hasta llegar a obtener 84 o darnos cuenta que cada número de la secuencia se obtiene multiplicando por 7. Es decir, el término 1 es 1 x 7, el término 2 es 2 x 7, y así sucesivamente. Así que para obtener 84 hay que multiplicar 7 por 12, así 84 sería el término 12 de la sucesión. Podemos verificar el resultado: busquemos en la lista de múltiplos el número que esta de doceavo

6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, **72**, 78, 84

Y calculamos el término 12 de la secuencia, le restamos un tercio de sí mismo y luego le sumamos un medio

$$72 - 24 + 36 = 84$$

Y efectivamente da 84.

Por lo tanto, 84 corresponde al término 12 de la secuencia.

26. En el museo de arte hay una secuencia de mosaicos que van siguiendo un patrón. Se trata de cuadrados cubiertos con cuadrados amarillos, naranjas y blancos, como se muestra en la imagen;

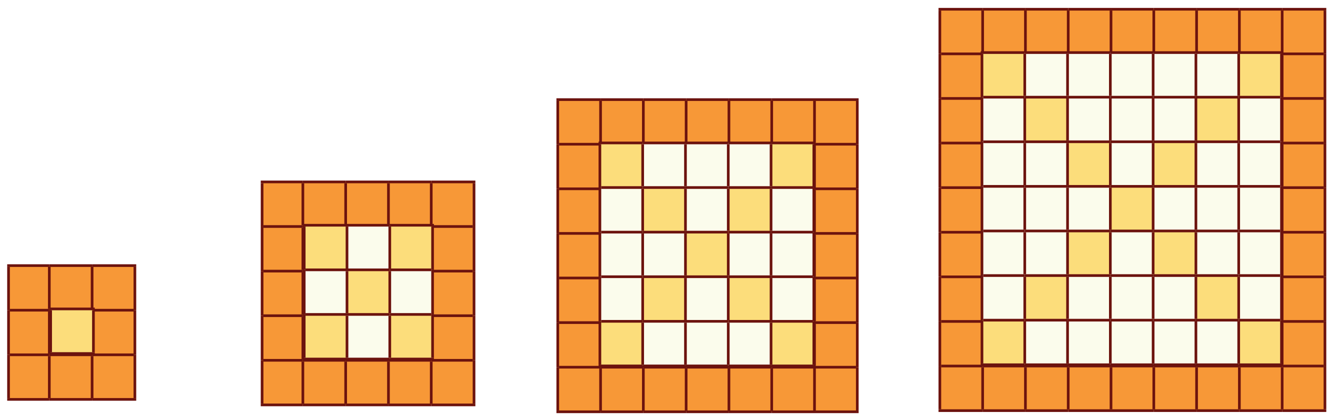


Figura 1 **Figura 2** **Figura 3** **Figura 4**

Si se continúa construyendo mosaicos con ese mismo patrón, ¿cuál es la suma de los cuadrados amarillos y naranjas que tendría la figura en la posición seis?

Solución:
Contemos los cuadrados naranja y amarillos de cada una de las figuras que tenemos, podemos resumir la información en una tabla.

Figura	Cuadrados naranjas	Cuadrados amarillos	Suma
1	8 +8	1 +4	8
2	16 +8	5 +4	21
3	24 +8	9 +4	33
4	32	13	45

Note en cada figura el número de cuadrados naranja aumenta en 8 y el número de cuadrados amarillos aumenta en 4 así podemos calcular los datos para las figuras 5 y 6

Figura	Cuadrados naranjas	Cuadrados amarillos	Suma
5	**40** +8	**17** +4	**57**
6	**48**	**21**	**69**

Por lo tanto, para la figura 6 la suma de los cuadrados amarillos y naranjas es de 69.

27. Observe los resultados de los primeros cinco lugares en la ronda clasificatoria de lanzamiento de martillo de las Olimpiadas de Tokio 2021. Según la información de la tabla, ¿cuál es la diferencia entre el promedio de distancia de lanzamiento de los atletas y la distancia de lanzamiento del atleta más cercano al promedio?

Atletas	País	Distancia
Quentin Bigot	Francia	78,73
Mykhaylo Kokhan	Ucrania	78,36
Nick Miller	Gran Bretaña	76,93
Esref Apak	Turquía	76,76
Pawel Fajdek	Polonia	76,46

Solución:
Lea cuidadosamente lo que pide

"¿Cuál es la diferencia entre el promedio de distancia de lanzamiento de los atletas y la distancia de lanzamiento del atleta más cercano al promedio?"

Lo primero que tenemos que hacer es calcular el promedio, recordemos como se calcula el promedio de un conjunto de datos

Para calcular el promedio de un conjunto de datos $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ sumamos los datos y lo dividimos entre la cantidad de datos

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$$

Ahora calculemos el promedio de las 5 distancias dadas en la tabla

$$\frac{78{,}73 + 78{,}36 + 76{,}93 + 76{,}76 + 76{,}46}{5} = \frac{387{,}24}{5} = 77{,}448$$

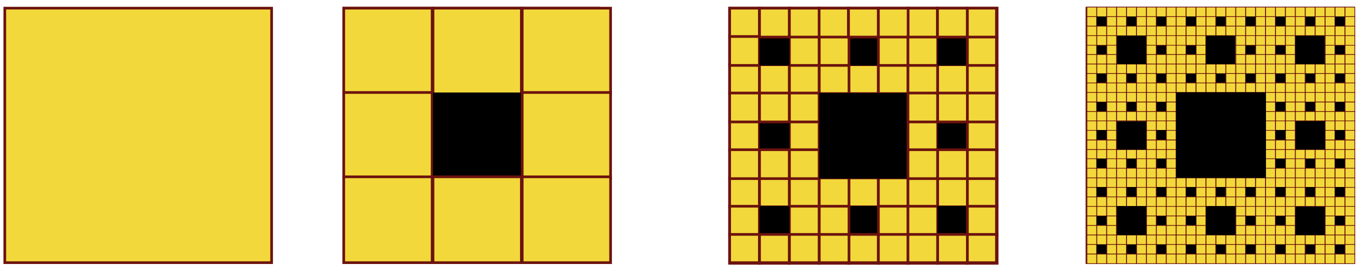
Identifiquemos la distancia más cercana al promedio, por simple observación podríamos tener duda entre 78,36 y 76,93. Para salir de la duda calculemos la diferencia de ambas distancias al promedio

$$78{,}36 - 77{,}448 = 0{,}912$$

$$77{,}448 - 76{,}93 = 0{,}518$$

Así que la distancia más cercana al promedio es 76,93 y la diferencia es de 0,518.

28. Helena ve en el libro de matemática de su hermano, un dibujo llamado “La alfombra de Sierpinski” e intenta dibujarla, invirtiendo los colores. Cada día realiza un paso de la imagen, el primer día dibuja un cuadrado. El segundo día lo divide en nueve cuadrados iguales y elimina el central. El tercer día, divide todos los cuadrados restantes en nueve cuadrados iguales y elimina todos los centrales. Cada día repite este paso, obteniendo la siguiente secuencia:



Día 1 **Día 2** **Día 3** **Día 4**

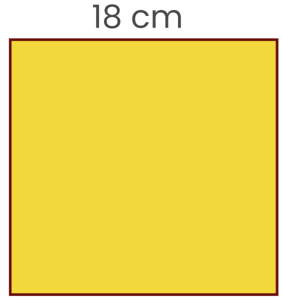
Si el perímetro del cuadrado amarillo del día 1 es 72 cm, ¿cuál es la suma, en centímetros, de los perímetros de los cuadrados negros del día 3?

Solución:

Tenemos que el perímetro del cuadrado amarillo del día 1 es 72 cm, si dividimos por 4 esa longitud, obtenemos el lado del cuadrado. Así el cuadrado del día 1 tiene lado

$$72 \div 4 = 18 \text{ cm}$$

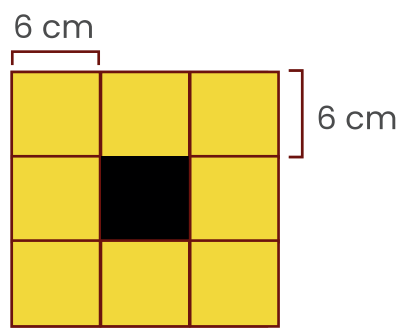
18 cm



18 cm

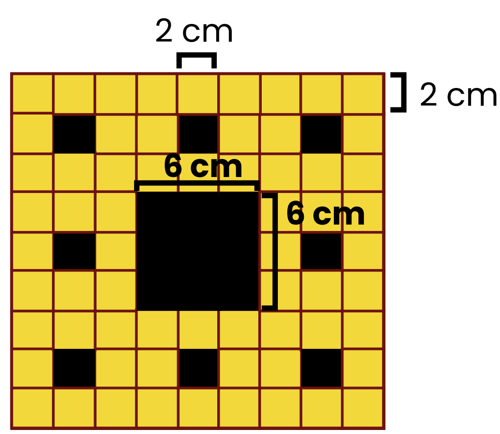
Día 1

Para el día 2 este cuadrado se divide en nueve cuadrados iguales, note que la longitud del lado del cuadrado se divide en 3. Así para cada uno de estos cuadrados la longitud del lado es 6cm.



Día 2

El tercer día, divide todos los cuadrados restantes en nueve cuadrados iguales. Similar al día 2, en cada uno de los cuadrados del día 2 la longitud del lado del cuadrado se divide en 3. Así en el día 3, cada cuadradito tiene longitud 2 cm.



Día 3

En el día 3 hay 8 cuadraditos negros, para los cuales la longitud del lado es 2 cm. Así para cada uno de esos cuadraditos el perímetro es

$$P = 2 + 2 + 2 + 2 = 4 \times 2 = 8 \text{ cm}$$

Como son 8 entonces la suma de los perímetros de esos 8 cuadraditos es 64 cm.

Ahora bien, en el día 3 hay un cuadrado negro más grande, que se obtuvo al eliminar todos los centrales. Note que para este cuadrado la longitud del lado es 6 (es igual a los cuadrados del día 2 o bien su lado es 3 veces el lado de los cuadraditos). Así que su perímetro es

$$PG = 6 + 6 + 6 + 6 = 4 \times 6 = 24 \text{ cm}$$

Así para obtener la suma, en centímetros, de los perímetros de los cuadrados negros del día 3 sumamos el perímetro del cuadrado grande y la suma que ya habíamos calculado de los perímetros de los cuadraditos negros

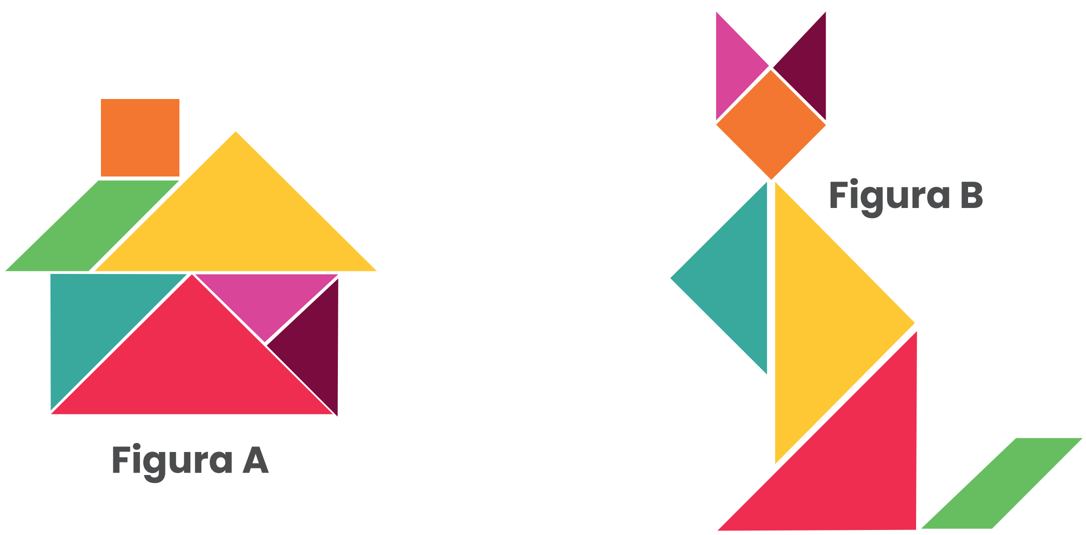
$$64 + 24 = 88 \text{ cm}$$

Por lo tanto, la suma de los perímetros de los cuadrados negros del día 3 es 88 cm.

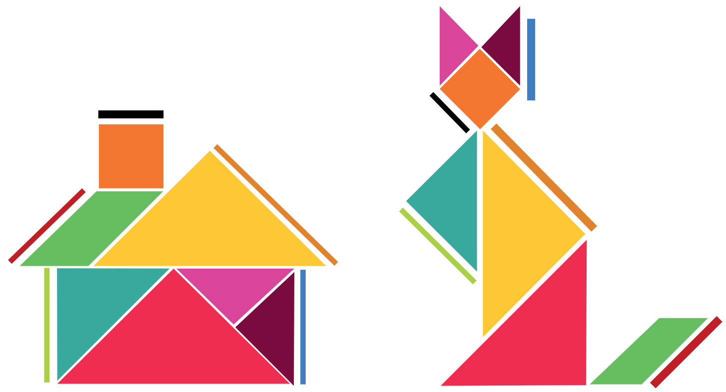
29. Observe las siguientes dos figuras construidas con las mismas piezas de colores. Los estudiantes dicen las siguientes afirmaciones:

• José dice que los perímetros de ambas figuras son iguales.
• María dice que el perímetro de la figura A es mayor que el perímetro de la figura B.
• Pedro dice que el perímetro de la figura B es mayor que el perímetro de la figura A.

¿Cuál de ellos dice una afirmación verdadera?

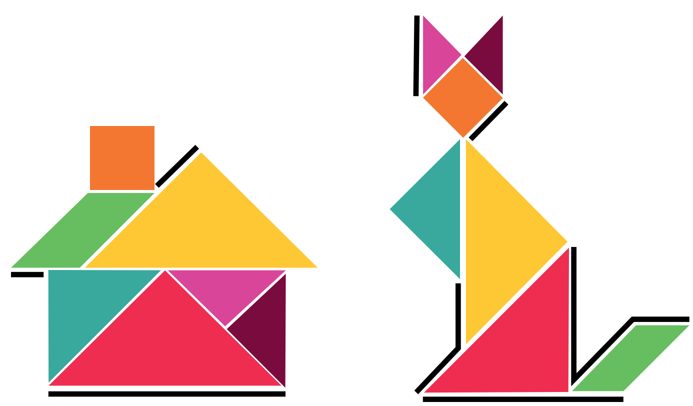


Solución:
Note que las figuras tienen algunos lados en común en su perímetro



Además note que la longitud de los lados del cuadrado anaranjado es igual a la longitud de dos lados de los triángulos rosado y morado(en la Figura B) entonces

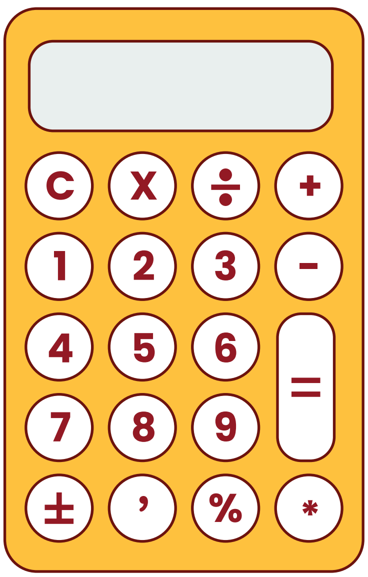
Se puede notar que la diferencia entre las dos figuras es



Por lo que el perímetro de la figura B es mayor que el perímetro de la figura A, así que Pedro es quién dice la verdad.

30. Marta estaba aprendiendo a programar en la computadora y creó una calculadora que realiza las cuatro operaciones básicas, pero además creó una tecla nueva (a la que identifica con un asterisco) que realiza una operación combinada inventada por ella, al ingresar un valor numérico seguido de la tecla asterisco.

A partir de los valores de la tabla obtenidos al usar la tecla inventada por Marta, determina el resultado que se obtendría al ingresar el valor 12.



Entrada	Salida
2	17
3	25
4	33
5	41
12	¿?

Solución:
Observe que

Entrada	Operación	Salida
2	**2** x 8 + 1	17
3	**3** x 8 + 1	25
4	**4** x 8 + 1	33
5	**5** x 8 + 1	41
12	**12** x 8 + 1	**97**

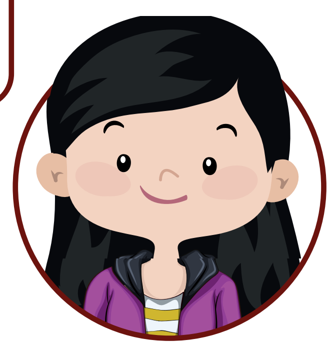
Otra forma de hacerlo es observar que

Entrada	Salida	
2	17	+8
3	25	+8
4	33	+8
5	41	

Y completar la sucesión hasta llegar al término 12, tomando en cuenta que inicia en 2

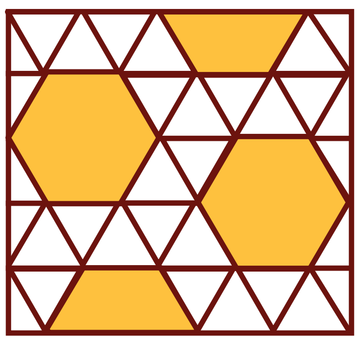
17, 25, 33, 41, 49, 57, 65, 73, 81, 89, 97

Por lo tanto, al ingresar el valor 12 se obtiene como resultado 97.

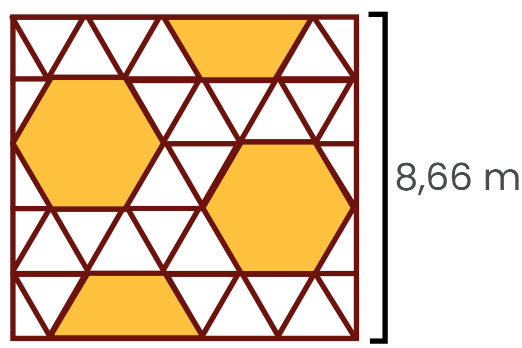


31. María es la encargada de pintar el mural del aula de matemática, decide cubrir la pared con hexágonos amarillos y triángulos blancos de 5 m de lado, como se muestra en la figura. La pared tiene una altura de 8,66 m.

Utilizará latas de pintura en spray que cubre 1,5 m^2 cada una. Tomando en cuenta que la cantidad de latas de spray requeridas debe redondearla a la unidad siguiente ya que se venden solo cantidades enteras, ¿cuántas latas de spray amarillo necesita comprar para pintar la pared?



Solución:
Calculemos primero el área de cada triangulito para así determinar el área del hexágono que está formado por 6 de los triangulitos. Para cada triángulo conocemos que tiene 5 m de lado, pero no conocemos su altura. La altura la podemos determinar conociendo que la pared tiene una altura aproximada de 8,66 m y 5 alturas de los triángulos forman la pared. Por lo que



$$8{,}66 \div 5 = 1{,}732\ m$$

Es aproximadamente la altura de cada triángulo (AT). Por lo que calculamos su área

$$AT = \frac{5 \times 1{,}732}{2} = 4{,}33\ m^2$$

Así el área de cada hexágono (AH) sería 6 veces la de un triángulo:

$$AH = 6 \times 4{,}33 = 25{,}98\ m^2$$

En la figura del mural se tiene 3 hexágonos, así que se debe pinta un área total de:

$$25{,}98 \times 3 = 77{,}94\ m^2$$

Si con una lata se cubre 1,5 m^2 debemos determinar cuántas latas se necesitan para cubrir 77,94 m^2. Para esto hacemos la siguiente división:

$$77{,}94 \div 1{,}5 = 51.96$$

Por lo que se necesitan 52 latas de spray.

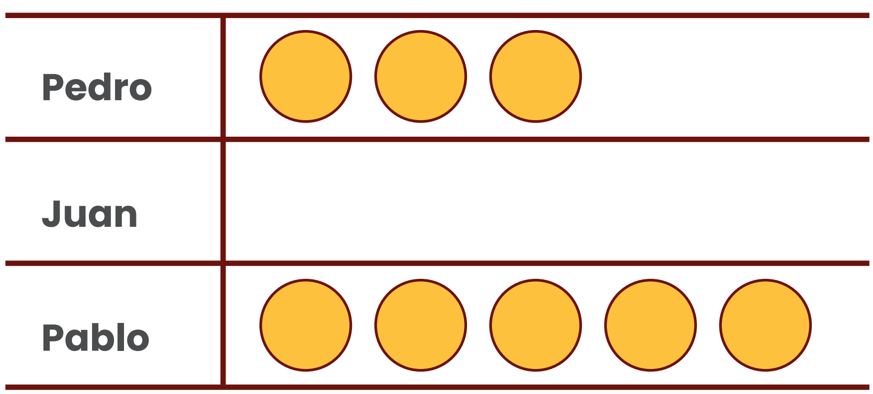
32. Tres amigos quedan para ver películas y comer algo, Pedro trae tres emparedados de oferta de la tienda BIG-PAN. Juan no ha traído nada. Pablo ha pasado también por BIG-PAN y ha comprado cinco emparedados de oferta.

Los amigos han repartido los emparedados en partes iguales, así que al final de la jornada Juan ha dado a sus amigos ₡ 8400 para que se repartan entre ellos, así cada uno paga lo que se ha comido.

a) ¿Cuánto costaba cada emparedado de oferta de BIG-PAN?

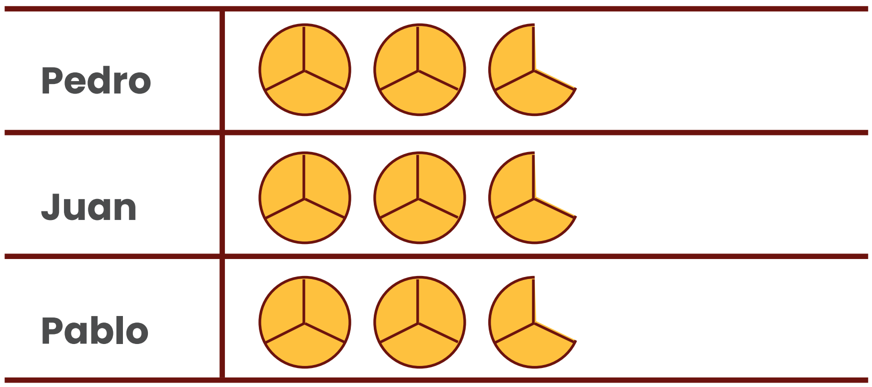
b) ¿Cuánto del dinero que ha dejado Juan le corresponde a Pedro y cuánto a Pablo?

Solución:
Del enunciado sabemos que ha traído cada amigo



Note que en total son 8 emparedados. Además, sabemos que los amigos han repartido los emparedados en partes iguales por lo que cada amigo come $\frac{8}{3}$

podemos hacer una representación gráfica



Sabemos que Juan no trajo emparedados así que al final ha dado a sus amigos ₡ 8400 para que se repartan entre ellos, lo que significa que lo que se comió Juan tiene un costo de ₡ 8400. Juan se comió 8 tercios de emparedado, por lo que podemos determinar el valor de cada tercio de emparedado realizando la operación

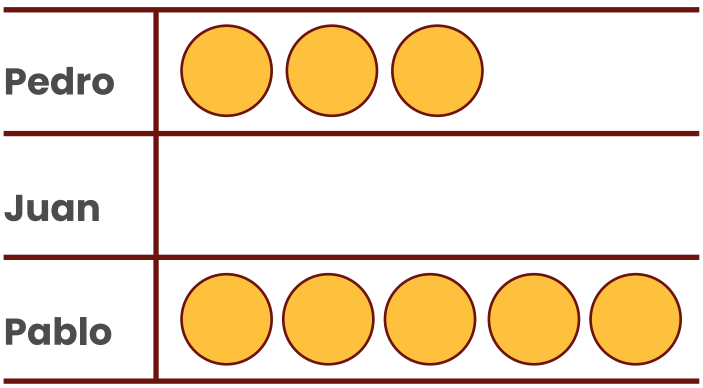
$$8400 \div 8 = 1050$$

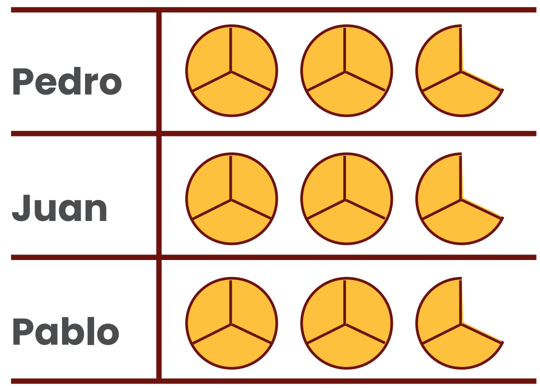
Así que un tercio de emparedado tiene un valor de ₡ 1050. Por lo tanto, el emparedado completo cuesta

$$1050 \times 3 = 3150 \text{ colones}$$

Con esta información podemos responder la parte **a)** del ejercicio. Cada emparedado de oferta de BIG-PAN costaba ₡ 3150.

Para responder la parte b) observemos detenidamente en las figuras iniciales que parte de lo que trajo Pedro se comió Juan y que parte de la que trajo Pablo se comió Juan.





Así Juan se comió:
- un tercio de emparedado de lo que trajo Pedro, como un tercio de emparedado tiene un valor de ₡ 1050 entonces de los ₡ 8400 que dio Juan, ₡ 1050 le corresponden a Pedro.
- Además comió 7 tercios de lo trajo Pablo, es decir 7 x 1050 = 7350. Así, de los ₡ 8400 que dio Juan, ₡ 7350 le corresponden a Pablo.

También se pudo haber calculado lo que le corresponde a Pablo como la diferencia entre los ₡ 8400 que dio Juan y los ₡ 1050 le corresponden a Pablo

$$8400 - 1050 = 7350$$

Por lo tanto, del dinero que dejó Juan ₡ 1050 le corresponden a Pedro y ₡ 7350 le corresponden a Pablo.

33. Para el cumpleaños de Gina, su madre preguntó a los catorce invitados que cuántos perros calientes comería cada uno. Algunos no querían comer, otros querían solo uno, dos e incluso tres. Ninguno quería más de tres perros calientes.

Si el promedio de perros calientes por invitado es de 0,5. ¿Cuántos niños no querían comer perros calientes?

Solución:
En una tabla, intentamos organizar las posibles respuestas de los estudiantes, las cuales son desconocidas, entonces podemos probar varias posibles combinaciones de respuestas hasta determinar una combinación que satisfaga el promedio dado.

Tomando en cuenta que el promedio (0,5) se obtiene dividiendo el total de perros calientes consumidos entre los 14 invitados (14 respuestas), para ello organicemos la información en la siguiente tabla:

Posibles respuestas						Total	Promedio
1	Invitados	2	4	4	4	14	$\frac{24}{14} = 1.71$
	Perritos	0	4	8	12	24	
2	Invitados	3	7	2	2	14	$\frac{17}{14} = 1.21$
	Perritos	0	7	4	6	17	
3	Invitados	3	8	2	1	14	$\frac{15}{14} = 1.07$
	Perritos	0	8	4	3	15	
4	Invitados	6	5	2	1	14	$\frac{12}{14} = 0.85$
	Perritos	0	5	4	3	12	

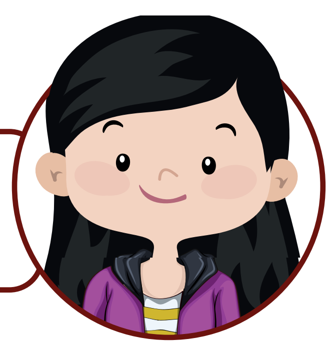
Posibles respuestas						**Total**	**Promedio**
5	Invitados	8	4	1	1	14	$\frac{9}{14} = 0.64$
	Perritos	0	4	2	3	9	
6	Invitados	10	2	1	1	14	$\frac{7}{14} = 0.5$
	Perritos	0	2	2	3	7	

Sabemos que el promedio es 0,5 y son 14 invitados, por lo que la suma de perros calientes que se consumen debe ser de siete, para que al sacar el promedio sea de 0,5.

Esta forma de respuesta es ir probando posibilidades, otra alternativa más directa podría ser una vez pensar en un número que dividido por 14 dé 0,5. Ese número sería siete, y luego distribuir las respuestas de los 14 invitados para que el total de perros consumidos sea siete, la cual sería como en la posibilidad seis. Note que al menos un invitado pidió una de las opciones (solo uno, dos e incluso tres) por lo que la distribución es única.

Por lo que hay diez niños que no quieren comer perro caliente en la fiesta de Gina.

Recuerde que el símbolo ≈ representa aproximadamente

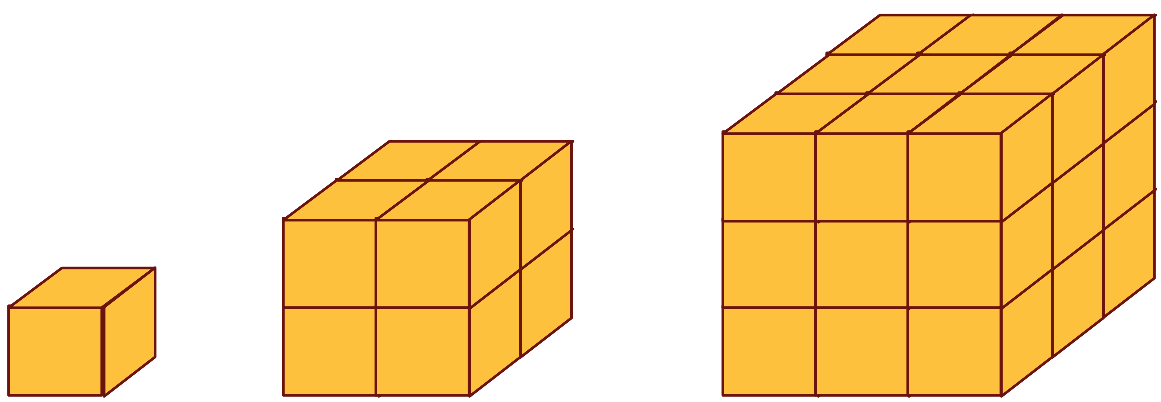


34. Usando cubitos de 1 cm de lado se forma una secuencia de cubos. El primer término está formado por un cubito, el segundo estaría formado por 8 cubitos y el tercero por 27 cubitos.

a. Si se continúa la secuencia, manteniendo el mismo patrón, ¿cuántos cubitos formarán el octavo término?
b. Si se quiere pegar una calcomanía en cada cara visible de los cubitos, de forma que para el primer término se necesitan 5 calcomanías y para el segundo 20, ¿cuántas calcomanías se necesitan para colocar en el término que se ubica en la posición 10?

¿Cómo se representa la cantidad de calcomanías necesarias para cualquier término de la secuencia?

Solución:
Hagamos una representación gráfica de los tres primeros términos de la secuencia



Organicemos la información en una tabla para determinar regularidades:

Término	1	2	3	4	...	n
Cubitos de 1 cm	1	8	27	64		n x n x n
Calcomanías	5	20	45	80		n x n x 5

Observa que para obtener el siguiente término, en la cantidad de cubitos, podemos elevar a la 3 el valor de la posición, por ejemplo:

$1^3 = 1$ $2^3 = 8$ $3^3 = 27$ $4^3 = 64$

El octavo término se formaría con 8 x 8 x 8 cubitos de 1 cm, es decir, 512 cubitos, osea $8^3 = 512$.

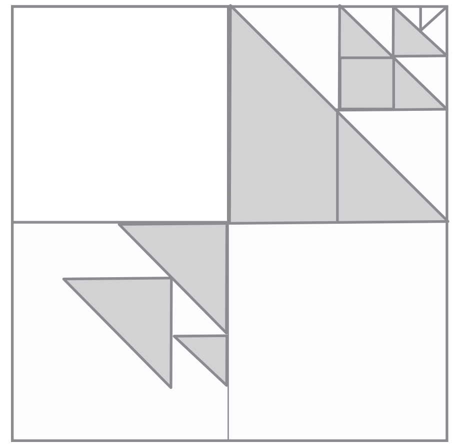
El término en la posición 10 requiere 10 x 10 x 5 calcomanías, es decir 500 calcomanías.

La cantidad de calcomanías necesarias para cualquier término de la secuencia está dada por n × n × 5 que se representa con

$$5 \times n^2$$

siendo *n* el número de término.

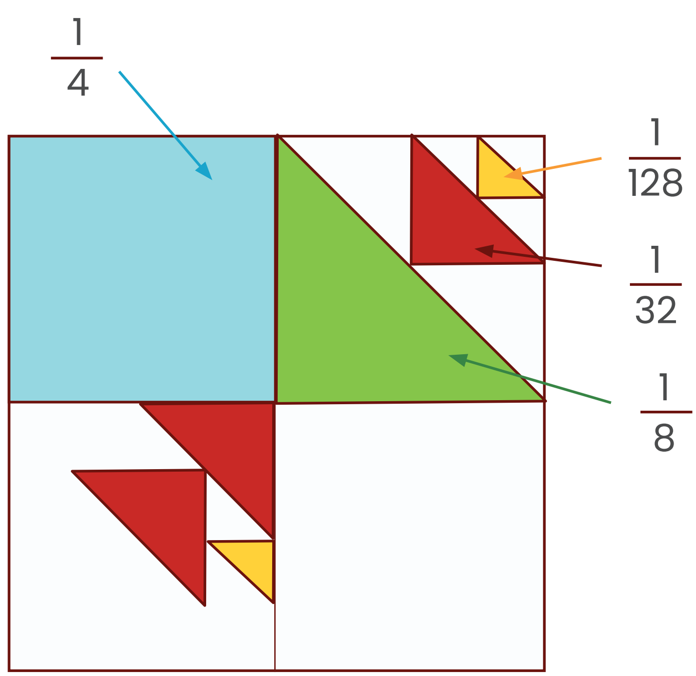
35. Mariana está estudiando el punto medio de un segmento. La maestra le da un cuadrado de cartulina y debe realizar el diseño de una figura, que obtenga trazando en el cuadrado únicamente: segmentos verticales, horizontales o diagonales cuyos extremos solo pueden ser vértices o puntos medios de algún cuadrado.



Mariana hizo su diseño de color gris, como se muestra en la figura, ha borrado algunas líneas para que se aprecie mejor. Si el cuadrado que le dio la maestra tenía 25 u^2 de área. ¿Cuál es el área del diseño de Mariana?

Solución:

Una alternativa es resolverlo por medio de fracciones, considerando la unidad como el cuadrado grande de 25 u^2 y determinando que fracción de esa unidad representa el área del diseño de Mariana.



La unidad se divide en cuatro cuartos (cuadrado celeste y denotado con $\frac{1}{4}$), luego ese cuarto se divide a la mitad para obtener un octavo (triángulo verde y denotado con $\frac{1}{8}$), al dividir un octavo en cuatro partes iguales se obtiene un treinta y dozavo (triángulo rojo y denotado con $\frac{1}{32}$), el cual si es dividido en cuatro partes iguales da lugar a uno sobre ciento veintiocho partes de la unidad (triángulo amarillo y denotado con $\frac{1}{128}$).

La figura del diseño de Mariana se conforma de una parte verde, tres rojas y dos amarillas.

Lo anterior, se representa de la siguiente manera:

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{128} + \frac{1}{128} =$$

$$\frac{16 + 4 + 4 + 4 + 1 + 1}{128} =$$

$$\frac{30}{128} =$$

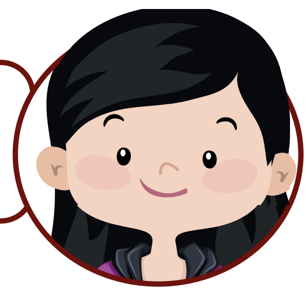
$$\frac{15}{64}$$

Para lo cual $\frac{15}{64}$ partes de una unidad que tiene 25 u^2 de área, representa:

$$25\left(\frac{15}{64}\right) = \frac{375}{64} = 5{,}86$$

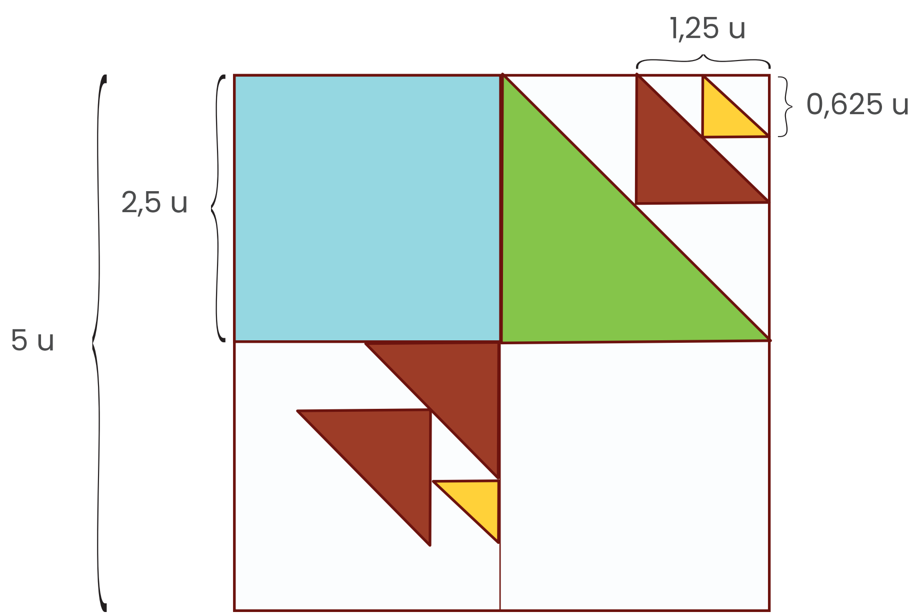
Por lo tanto, el área del diseño de Mariana es aproximadamente 5, 86 u^2 de área.

Recuerde que el símbolo ≈ representa aproximadamente



Otra alternativa es realizarlo por medio de cálculo de áreas, utilizando el dato de que el cuadrado grande tiene 25 u2 de área, para determinar las medidas de los segmentos que se requieran.

Si el área del cuadrado mide 25 u^2, entonces cada lado del cuadrado mide 5 u. Por lo que la mitad del lado mide 2,5 u.



La mitad de ese nuevo segmento, mide 1,25 u, y a su vez la mitad de ese otro nuevo segmento mide 0,625 u. Como se muestra en la figura.

El área de la figura en el diseño de Mariana está formada por un triángulo de lado 2,5 u, tres triángulos de lado 1,25 u y dos triángulos de lado 0,625 u. Por lo que en total tiene un área de:

$$\frac{2{,}5 \times 2{,}5}{2} + 3\left(\frac{1{,}25 \times 1{,}25}{2}\right) + 2\left(\frac{0{,}625 \times 0{,}625}{2}\right)$$

$$= \frac{6{,}25}{2} + 3\left(\frac{1{,}5625}{2}\right) + 2\left(\frac{0{,}390625}{2}\right)$$

$$= \frac{6{,}25}{2} + \frac{4{,}6875}{2} + \frac{0{,}78125}{2}$$

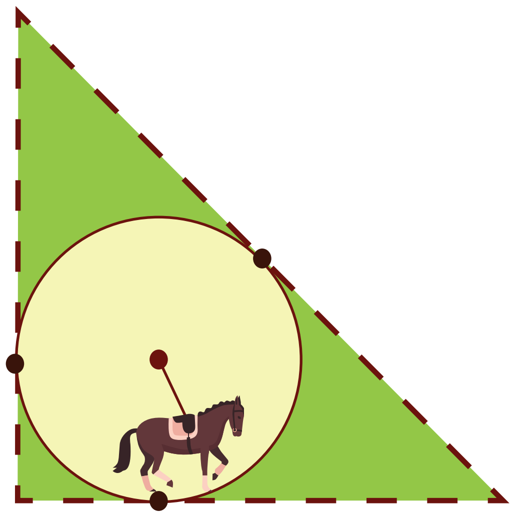
$$= \frac{11{,}71875}{2}$$

$$= 5{,}859375 \text{ u} = 5{,}86 \text{ cm}$$

Obteniendo la misma solución.

36. Don Quincho tiene una parte de su finca con pasto muy verde, la cual tiene forma de triángulo rectángulo isósceles. Él ha puesto una estaca en un punto que equidista (se encuentra a la misma distancia) de los tres lados de ese terreno y ha amarrado ahí a su pony para que coma pasto.

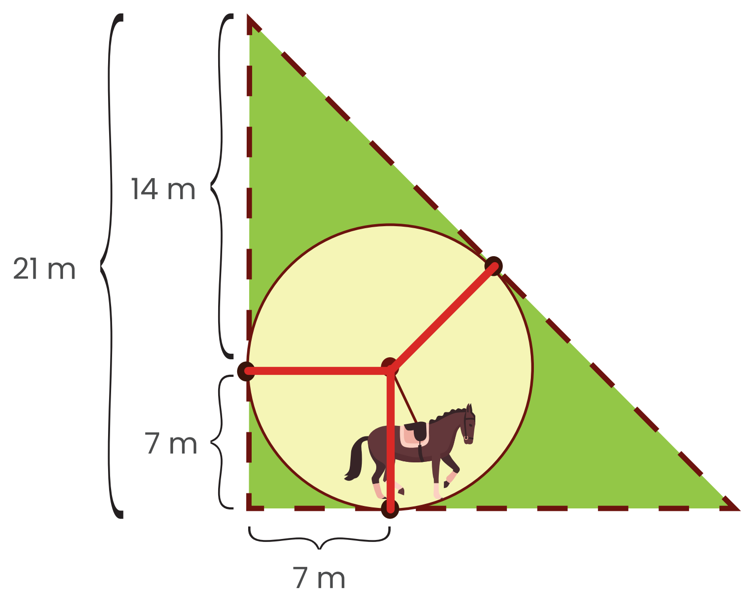
El pony ha estado por mucho tiempo comiendo y ha devorado todo lo que tenía a su alcance, ahora el terreno luce como el de la figura.



Si los puntos en los que la circunferencia toca los lados del triángulo que forman el ángulo recto, están a 7 m de dicho ángulo y determinan un tercio de estos lados del triángulo.

¿Cuál es el área aproximada de la zona con pasto?

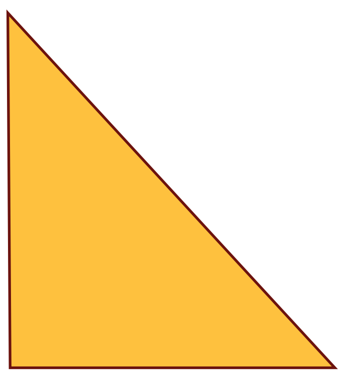
Solución:
Se realiza una representación gráfica de la situación, en la cual se resaltan los tres segmentos que equidistan de los lados del terreno triangular. Tres segmentos de igual medida (color rojo).

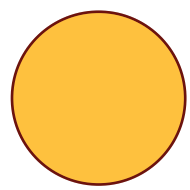


Se dice que los puntos en los que esos segmentos tocan los lados del terreno, que forman el ángulo recto, están a 7m de dicho ángulo, por lo que la distancia de 7m del ángulo al punto se señala en la figura adjunta.

Además, ese punto a los 7m determina un tercio del lado del terreno. Por lo que el lado del terreno mide 7 × 3 = 21, y los segmentos restantes del lado, 7 + 7 = 14. Lo cual se señala de igual forma en la figura adjunta.

Como se puede observar en la figura el radio de la circunferencia, zona sin pasto, es de 7m. Por lo que para determinar el área de la zona con pasto se debe restar el área de la circunferencia del área del triángulo rectángulo grande, obteniendo entonces:





Área del trángulo

$$At = \frac{21 \times 21}{2}$$

$$At = \frac{441}{2}$$

$$At \approx 220{,}5$$

Área del círculo

$$Ac = \pi \times 7^2$$

$$Ac = \pi \times 49$$

$$Ac \approx 153{,}86$$

Área de la zona con pasto

$$\frac{21 \times 21}{2}$$

$$= 441 - \frac{\pi \times 49}{2}$$

$$\approx 220{,}5 - 153{,}86$$

$$\approx 66{,}64$$

El área aproximada de la zona con pasto es de 66,64 m^2.

Créditos
Los ítems fueron tomados de la prueba aplicadas en las diferentes etapas de la OLCOMEP 2021.

Autora de los ítems

Mónica Mora Badilla, profesora de Matemática,
Universidad Estatal a Distancia

Compilación y estrategias de solución de los cuadernillos realizadas por:

Geisel Alpízar Brenes, profesora, Escuela de Matemática
Instituto Tecnológico de Costa Rica

Hermes Mena Picado, asesor Nacional de Matemática.
Departamento de Primero y Segundo Ciclos
Dirección de Desarrollo Curricular

Revisores de los cuadernillos

Alejandra Sánchez Ávila, encargada de la Cátedra de Didáctica de la Matemática.
Universidad Estatal a Distancia (UNED).

Hermes Mena Picado, asesor Nacional de Matemática.
Departamento de Primero y Segundo Ciclos
Dirección de Desarrollo Curricular

Ministerio de
Educación Pública

UNIVERSIDAD DE
COSTA RICA

UNED

TEC Tecnológico
de Costa Rica

OLCOMEP