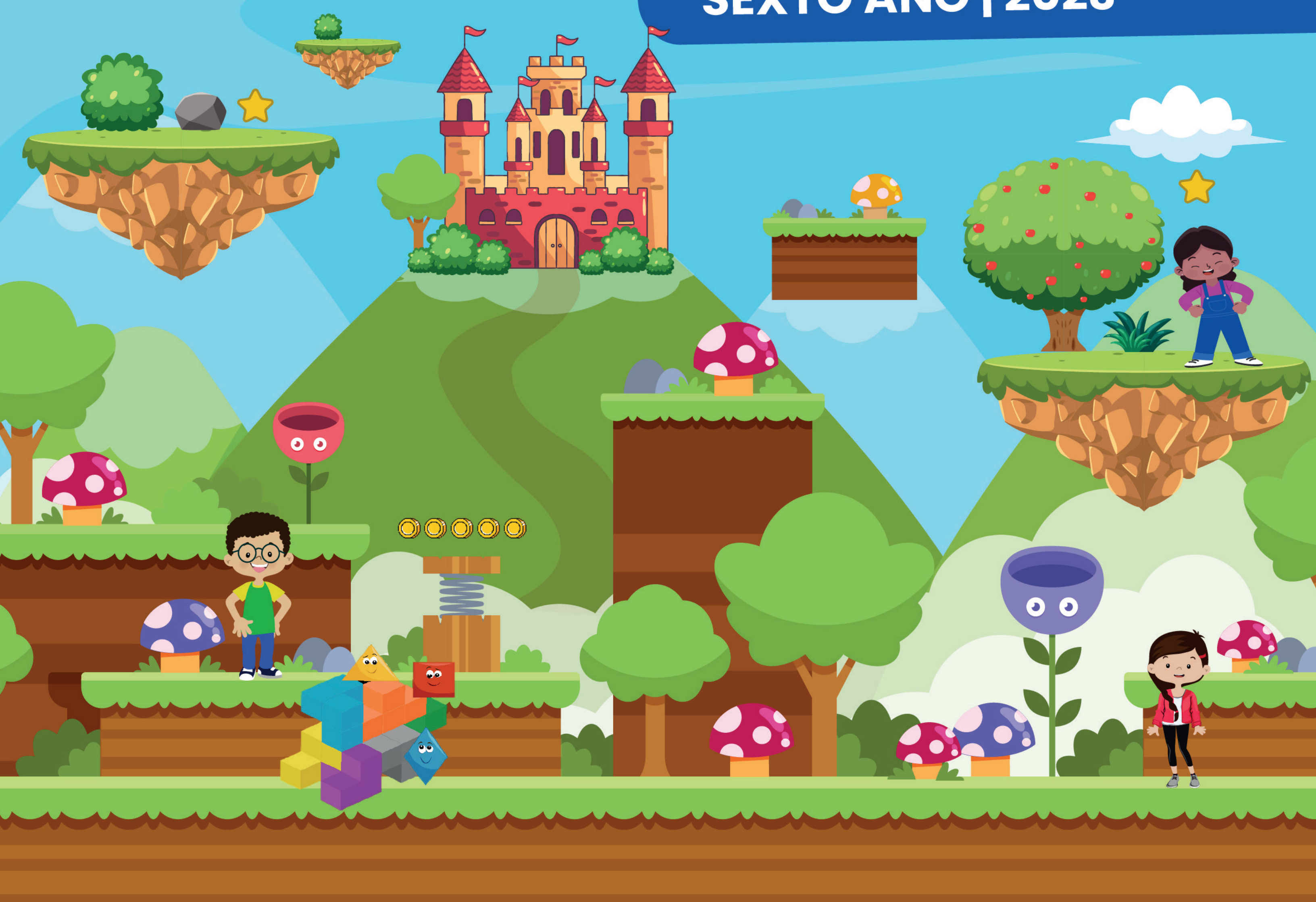
mep Ministerio de Educación Pública | Universidad de Costa Rica | UNED | TEC Tecnológico de Costa Rica | OLCOMEP

Ministerio de Educación Pública
Dirección de Desarrollo Curricular
Departamento de Primero y Segundo Ciclos
Asesoría Nacional de Matemática

Olimpiada Costarricense de Matemática para Educación Primaria - OLCOMEP

6º CUADERNILLO DE APOYO PARA EL DOCENTE

SEXTO AÑO | 2023



PRESENTACIÓN

Es fundamental que nuestro sistema educativo fomente en la sociedad costarricense, todas las actividades posibles orientadas a estimular el desarrollo matemático, científico y tecnológico, a efecto de formar personas críticas y analíticas, habilidades necesarias para hacer frente a los retos y demandas contemporáneas.

La enseñanza de la Matemática ocupa un papel clave en el currículo escolar y persigue el desarrollo de un proceso intelectual en los estudiantes. La Olimpiada Costarricense de Matemática para Educación Primaria **OLCOMEP**, tiene como finalidad estimular y desarrollar entre los niños y niñas sus capacidades de resolución de problemas matemáticos, por medio de una competencia de conocimiento sana entre estudiantes de los seis años escolares de la Educación General Básica diurna de todas las direcciones regionales educativas del país.

El presente cuadernillo pretende ser un insumo de apoyo para el docente y practica para el estudiante. El mismo busca orientar a los y las participantes de la **OLCOMEP**, por medio de la presentación de problemas recopilados de las pruebas aplicadas en ediciones anteriores de la misma olimpiada. Su contenido pretende dar pautas sobre los tipos de problemas a los que se van a enfrentar los y las estudiantes en las diferentes etapas que comprende la **OLCOMEP**, así como sus estrategias de resolución.

Los problemas aquí seleccionados se fundamentan en situaciones matemáticas donde se requiera manifestar las habilidades que caractericen el talento matemático para lograr su resolución, basados en los niveles de complejidad de los problemas descritos en el Programa de Estudio en Matemáticas (MEP, 2012) y por medio de los diferentes contextos que se consideran para la olimpiada.

Comisión Central de OLCOMEP

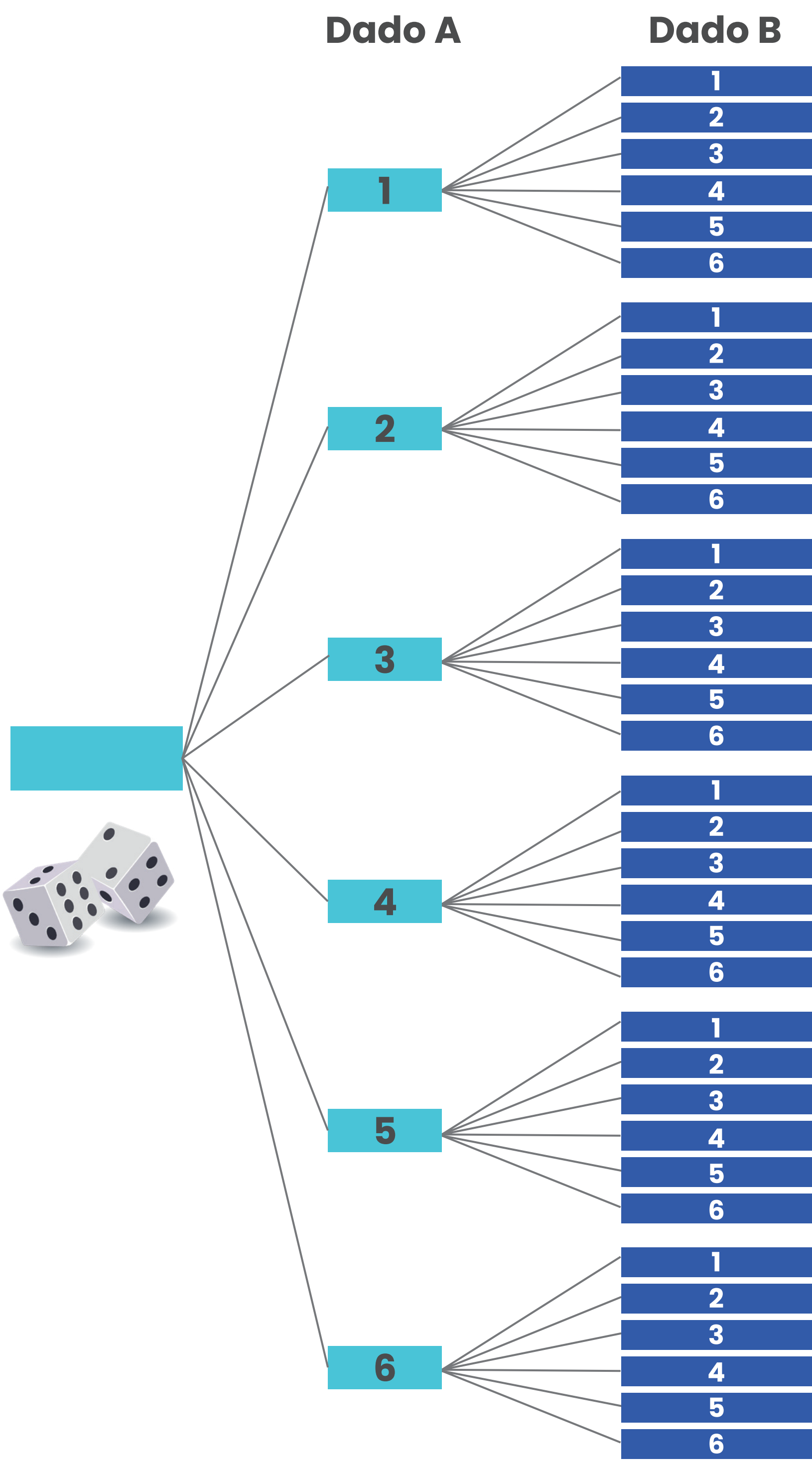
1. Lucía lanza dos dados simultáneamente, cuyas caras están enumeradas de 1 al 6. Antes de lanzar los dados tres amigos comentan tres posibles eventos:

- Geisel: obtener dos números iguales.
- José: la suma de los dos números es igual a 6.
- Alondra: obtener un 6 en alguno de los dos lados.

¿Quién comenta el evento más probable?

Solución:
Se analizarán los tres casos según el problema, además se debe tomar en cuenta que por un dado hay seis posibilidades de que salga un número entre el 1 y 6.

Cuando se lazan 2 dados hay 6 x 6 = 36 posibles resultados (combinaciones o arreglos de números) y el orden no importa ya que los dados son lanzados al mismo tiempo. Se pueden representar los posibles resultados por medio de un diagrama de árbol, en forma de pares ordenados en una tabla o ambas simultáneamente, para contar el número de posibilidades:



Resultados posibles

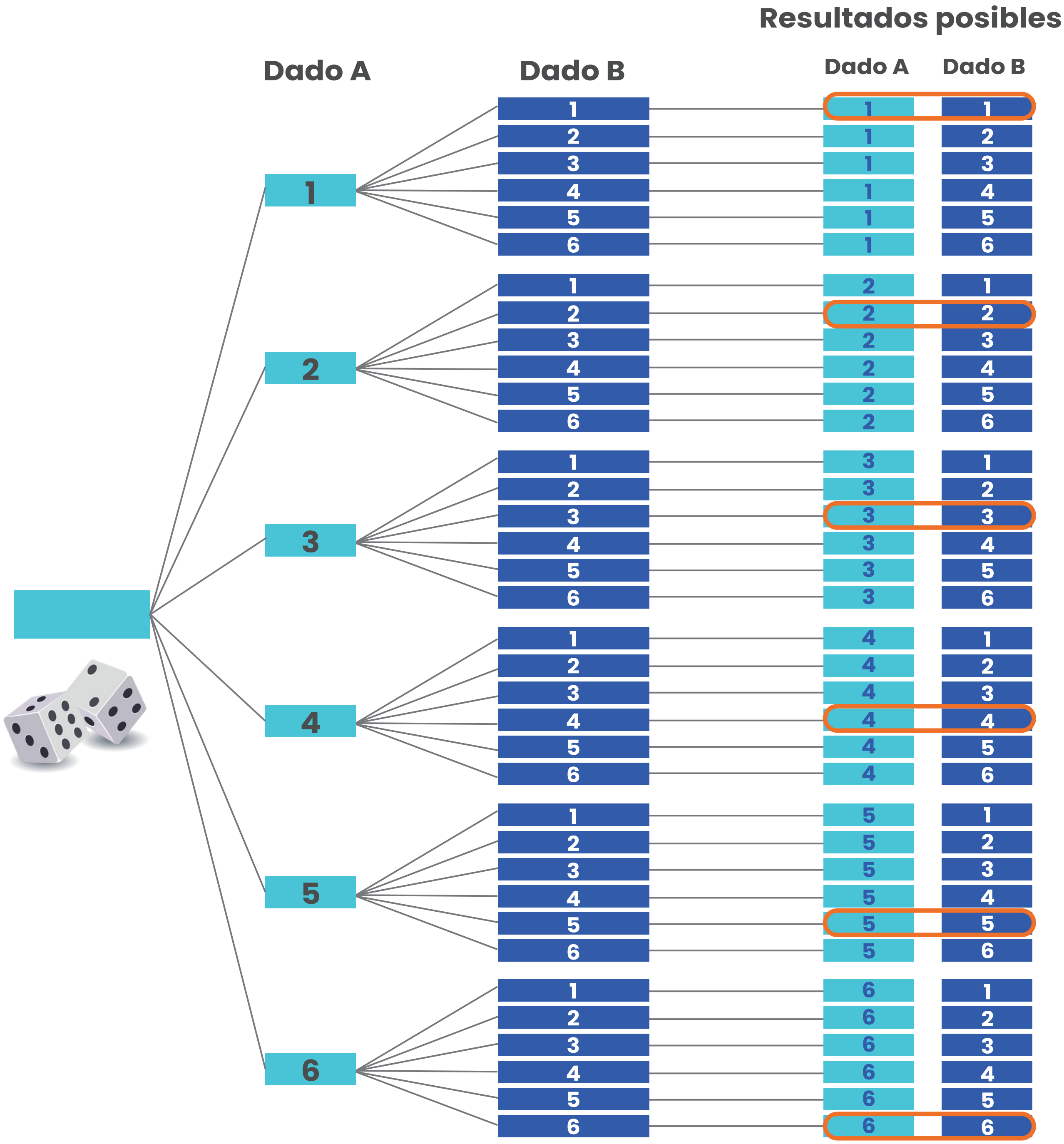
Dado A	Dado B
1	1
1	2
1	3
1	4
1	5
1	6
2	1
2	2
2	3
2	4
2	5
2	6
3	1
3	2
3	3
3	4
3	5
3	6
4	1
4	2
4	3
4	4
4	5
4	6
5	1
5	2
5	3
5	4
5	5
5	6
6	1
6	2
6	3
6	4
6	5
6	6

Resultados posibles al lanzar dos dados

	Segundo dado					
Primer dado	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Ahora se analiza cada caso:

- **Geisel: obtener dos números iguales.**



Resultados posibles al lanzar dos dados

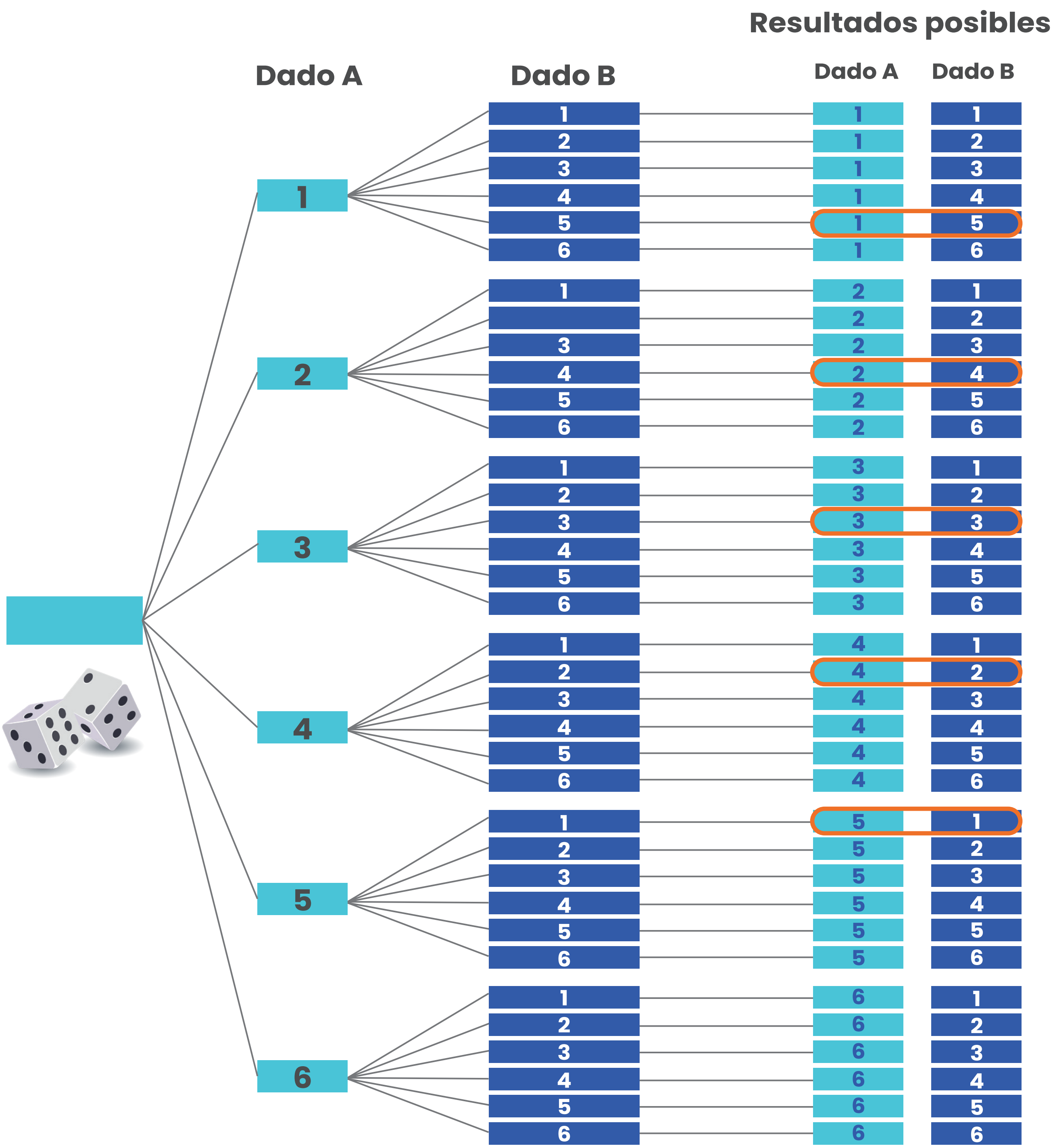
	Segundo dado					
Primer dado	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Del análisis anterior, en cualquiera de sus dos representaciones, se puede concluir que existen seis posibilidades de que en los dos dados salgan los mismos números. , de esta forma se realiza lo siguiente:

$$P(\text{números iguales}) = \frac{\text{Cantidad de resultados favorables}}{\text{Número total de resultados}} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} =$$

- **José: la suma de los dos números es igual a 6.**

Volviendo a las representaciones que se hicieron de las posibilidades, analizamos lo dicho por José:


Resultados posibles
Dado A
Dado B
Dado A
Dado B
1
1 1 1
2 1 2
3 1 3
4 1 4
5 1 5
6 1 6
2
1 2 1
2 2
3 2 3
4 2 4
5 2 5
6 2 6
3
1 3 1
2 3 2
3 3 3
4 3 4
5 3 5
6 3 6
4
1 4 1
2 4 2
3 4 3
4 4 4
5 4 5
6 4 6
5
1 5 1
2 5 2
3 5 3
4 5 4
5 5 5
6 5 6
6
1 6 1
2 6 2
3 6 3
4 6 4
5 6 5
6 6 6

Como se puede ver en las representaciones anteriores tenemos 5 posibilidades para el resultado de que la suma sea 6. No contamos con el caso en el que en uno de los dados cae 6 ya que con el otro dado superaría al evento indicado por José, es así como concluimos que el resultado es:

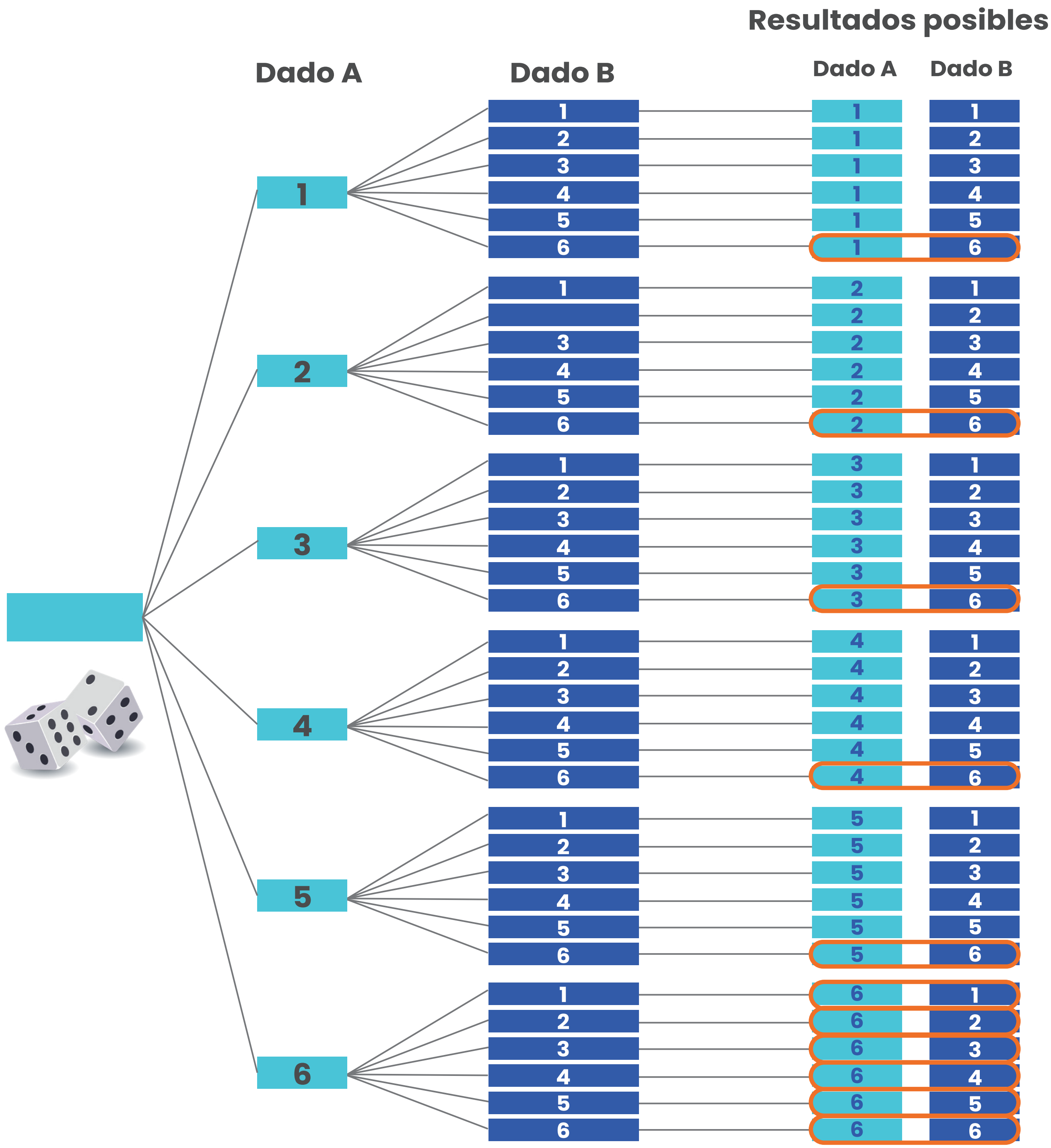
$$P(\text{suma sea } 6) = \frac{\text{Cantidad de resultados favorables}}{\text{Número total de resultados}} = \frac{5}{36} =$$

Resultados posibles al lanzar dos dados

	Segundo dado					
Primer dado	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	$\boxed{(1,5)}$	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	$\boxed{(2,4)}$	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	$\boxed{(3,3)}$	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	$\boxed{(4,2)}$	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	$\boxed{(5,1)}$	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

- **Alondra obtener un 6 en alguno de los dos lados.**

Podemos seguir utilizando las mismas representaciones anteriores.



Resultados posibles al lanzar dos dados

	Segundo dado					
Primer dado	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Como se puede ver en las representaciones anteriores tenemos 11 posibilidades para el resultado de obtener un 6 en alguno de los resultados. Así es como concluimos que el resultado es:

$$P(\text{obtener un } 6) = \frac{\text{Cantidad de resultados favorables}}{\text{Número total de resultados}} = \frac{11}{36} =$$

Lo que nos da la probabilidad más alta, y por esta razón el evento más probable es el de Alondra.

2. Julián es amante de los cubos Rubik y de los legos. Ha construido, con cubitos de lego de colores, variedad de representaciones de cubos Rubik de varios tamaños. Para construir la representación del cubo Rubik de lados 2 ha utilizado ocho cubitos de lego, para el de lado 3 ha utilizado 27 cubitos de lego y así sucesivamente.

¿Cuál de las siguientes cantidades de cubitos de lego **NO** permite construir una representación de un cubo Rubik sin que le sobren ni falten piezas?

A) 216
B) 333
C) 343

Solución:
Debes extraer los datos del problema los cuales pueden ser representados en una tabla:

Lado del cubo	Cantidad de legos
2	8
3	27

Puedes observar el patrón que se empieza a cumplir de esta forma:
Para el cubo de lado 2: $2^3 = 8$
Para el de lado 3: $3^3 = 27$.

De esta forma se puede comprobar cuál de las opciones representa una cantidad de legos para construir los cubos, para esto se continúa con la tabla, de la siguiente forma:

Lado del cubo	Cantidad de legos
2	$2^3 = 8$
3	$3^3 = 27$
4	$4^3 = 64$
5	$5^3 = 125$
6	$5^3 = 216$
7	$7^3 = 343$
⋮	⋮

De esta forma puedes comprobar que la respuesta que **NO** permite construir una representación de un cubo Rubik, sin que le sobren ni falten piezas, es la opción B, el 333.

3. La maestra les muestra a sus alumnos las siguientes tarjetas con números, las cuales siguen un patrón:

0	**3**	**8**	**15**	**24**	

Ella les pregunta a sus alumnos que si se mantiene el patrón presente, que número debe ir en la sexta tarjeta. A lo que tres alumnos contestan:

- Marco dice que debe ir el número 36
- Karen dice que debe ir el número 35
- José que el número que debe ir es el 39

¿Cuál de los tres alumnos tiene la razón?

A) Marco
B) Karen
C) José

Solución
Se analiza el patrón para determinar alguna diferencia común entre los términos:

0	**3**	**8**	**15**	**24**	

$0 + 3 = 3$ $3 + 5 = 8$ $8 + 7 = 15$ $15 + 9 = 24$ $24 + 11 = 35$

Se observa que lo que se cumple en la sucesión es que al número dado se le suma un número impar de forma consecutiva iniciando en 3. Entonces, tal como muestra la figura anterior, al 24 se le sumarían 11 que es el siguiente impar natural después de 9. **Por lo que seguirá el 35 y Karen tiene la razón.**

Otra forma de solucionar el reto, es visualizarlo simbólicamente:

0	**3**	**8**	**15**	**24**	

Para ello, vamos a representar los términos en una tabla, y llamaremos n al lugar que ocupa cada término(a), mientras entonces:

n - 1

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
a(n)	0	0 + 3 = 3	3 + 5 = 8	8 + 7 = 15	15 + 9 = 24	

Al término anterior, a_{n-1}, se le suma un número impar que corresponde a multiplicar la posición anterior por 2 y sumar uno, o sea 2(n−1)+1

Podemos también aplicar la ley de formación $a(n) = \overbrace{a_{n-1}}^{\text{Término anterior}} + \overbrace{2(n-1)+1}^{\text{Número impar correspondiente}}$

Como debemos determinar el sexto término, ni n=6

n	1	2	3	4	5	6
a(n)	0	3	8	15	24	

a(5) a(6)

$$a(6) = a(5) + 2(6-1) + 1$$
$$= 24 + 10 + 1$$
$$= 35$$

De cualquier forma, se puede concluir que Karen tiene la razón.

4. Tres amigas compraron pizzas que venían partidas: la primera en tres tercios, la segunda en nueve partes iguales y la tercera en seis partes iguales. Si se reparten las pizzas de la siguiente manera:

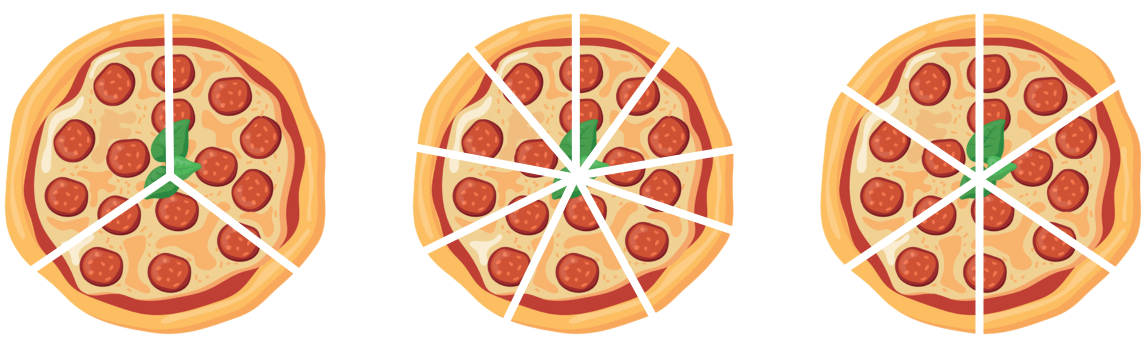
- Karla toma una parte de la tercera pizza y dos partes de la segunda.
- María toma dos partes de la primera pizza y tres de la segunda.
- Dariela toma una parte de la segunda pizza y dos de la tercera.

¿Cuál de ellas se comió una pizza completa?

A) Karla
B) María
C) Dariela

Solución

Para determinar quién comió más pizza puedes representar la situación planteada de forma gráfica:



- **Karla toma una parte de la tercera pizza y dos partes de la segunda.**

Para el caso de Karla basta tomar la cantidad de partes de pizza que tomó, para ella pasa que: $\frac{1}{6}$ parte de la tercera pizza y $\frac{2}{9}$ partes de la segunda pizza y se suman para ver el total:

$$\frac{1}{6} + \frac{2}{9} = \frac{1}{2x3} + \frac{2}{3x3} = \frac{3 \times 1 + 2 \times 2}{2x3x3} = \frac{3+4}{18} = \frac{7}{18} = \frac{7}{18}$$

- **María toma dos partes de la primera pizza y tres de la segunda.**

En el caso de María puedes proceder de la misma forma que Karla, pero sustituyendo los datos correspondientes, primero tomó $\frac{2}{3}$ partes de la primera pizza y $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ parte de la segunda pizza: $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$

- **Dariela toma una parte de la segunda pizza y dos de la tercera.**

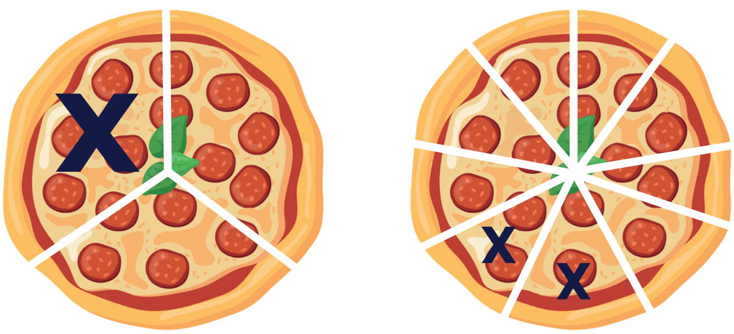
Para Dariela, de la misma forma que las dos chicas anteriores, ella tomó $\frac{1}{9}$ parte de la segunda pizza y $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ parte de la tercera pizza:

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{3} = \frac{1+3}{9} = \frac{4}{9}$$

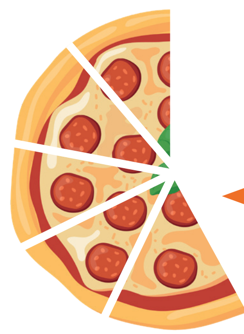
Por lo que la que la persona que comió una pizza completa fue María.

También se puede resolver desde una perspectiva gráfica:

- **Karla toma una parte de la tercera pizza y dos partes de la segunda.**

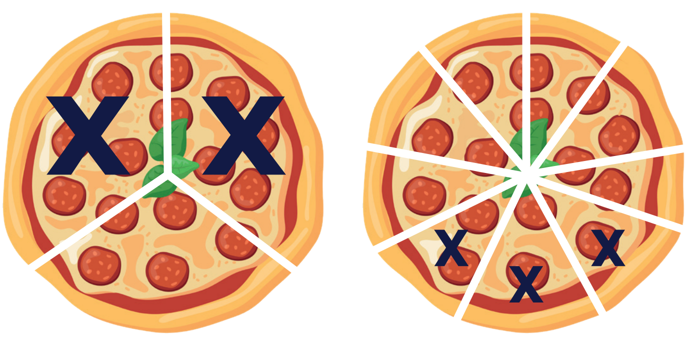


Notemos que $\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$



Total tomado por Karla

- **María toma dos partes de la primera pizza y tres de la segunda.**



Notemos que $\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$

Total tomado por María

- **Dariela toma una parte de la segunda pizza y dos de la tercera.**

=

Note que $\frac{1}{9} = \frac{2}{18}$

Cada pedazo de la segunda pizza lo podemos partir a la mitad, obteniendo 18 pedazos

Cada pedazo de la tercera pizza lo podemos partir en tres partes iguales, obteniendo 18 pedazos

=

Recuerde que

$\frac{1}{6} = \frac{3}{18}$

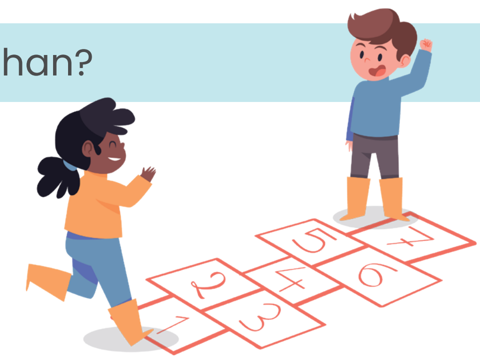
$\frac{2}{6} = \frac{6}{18}$

Al partir las pizzas en 18 pedazos, Dariela toma de total 8, 2 de la segunda pizza y 6 de la tercera (son los pedazos marcados)

Por lo que, si la pizza se parte en 18 pedazos, Dariela toma 8 de esos pedazos: $\frac{8}{18} = \frac{4}{9}$, al simplificar.

5. Johan marcó todo el juego de rayuela, excepto los números, con una cinta adhesiva de color que le regaló su madre. Si cada cuadro del juego tiene 25 centímetros de área.

¿Cuántos centímetros de cinta gastó Johan?



A) 175
B) 140
C) 110

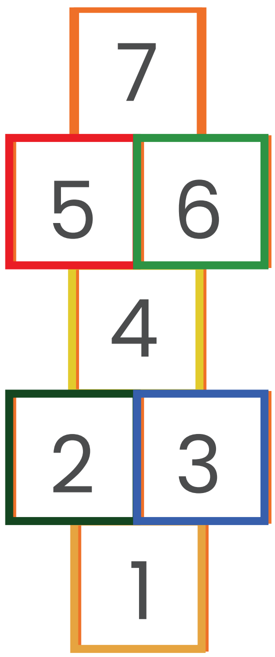
Solución
La fórmula del área del cuadrado es A = l^2 y se sabe del problema que el área de cada cuadrado es de 25 cm^2, entonces debemos pensar en un número que al multiplicarlo por si mismo me dé como resultado 25: probamos con 2 x 2 = 4, 3 x 3 = 9, 4 x 4 = 16, 5 x 5 = 25.

Por lo que el 5 el número buscado, la medida del área del cuadrado cuya área es 25:

$l = 5\ cm \qquad 5\ cm \times 5\ cm = l \times l \qquad 25\ cm^2 = l^2$

Con esto averiguamos la medida de cada lado del cuadrado.

Como nos solicitan la cantidad de cinta utilizada, hay que averiguar el perímetro de los cuadros que conforman el juego, tomando en cuenta que en algunos casos los cuadros comparten un lado por lo que no hay que contar ese lado en el segundo cuadro. Por ejemplo, el cuadro con el número 1 tiene 3 lados, pues el cuarto es formado con partes de los lados de los cuadros que pertenecen a los números 2 y 3, pasa una situación parecida con los cuadros que pertenecen a los números 3, 4, 6 y 7. Siguiendo esta información se debe tener en cuenta la siguiente información:



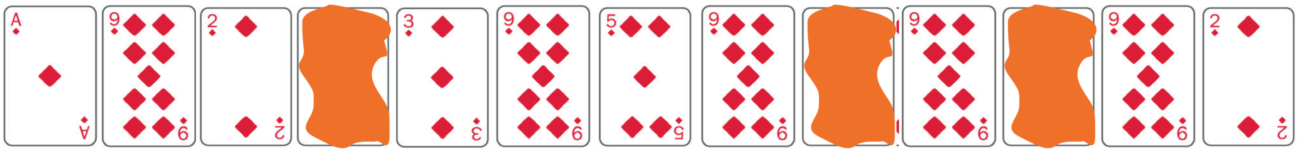
- Para el cuadro del número 1, tomamos 3 lados, por lo que se utilizan 15 cm.
- Para el cuadro del número 2, tomamos 4 lados, por lo que se utilizan 20 cm.
- Para el cuadro del número 3, tomamos 3 lados, por lo que se utilizan 15 cm.
- Para el cuadro del número 4, tomamos 2 lados, por lo que se utilizan 10 cm.
- Para el cuadro del número 5, tomamos 4 lados, por lo que se utilizan 20 cm.
- Para el cuadro del número 6, tomamos 3 lados, utilizando 15 cm.
- Para el cuadro del número 7, tomamos 3 lados, utilizando 15 cm.

Por la información anterior, se tiene que:

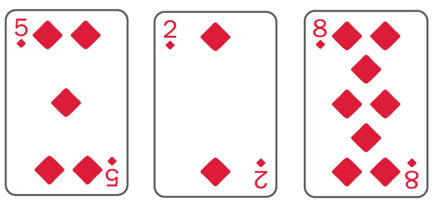
15 cm + 20 cm + 15 cm + 10 cm + 20 cm + 15 cm +15 cm = 110 cm

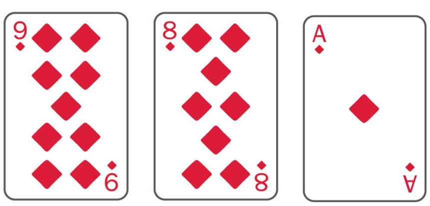
Por lo que Johan gastó 110 cm de cinta, la opción correcta sería la C.

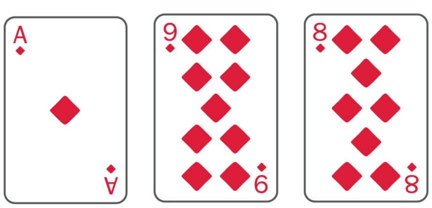
6. Darío está colocando cartas sobre la mesa, pero su hermanita dejó caer tinta sobre algunas de ellas como se muestra en la imagen.



Si las ordenó siguiendo un patrón, ¿cuál opción representa las cartas que se mancharon de tinta en el orden respectivo?

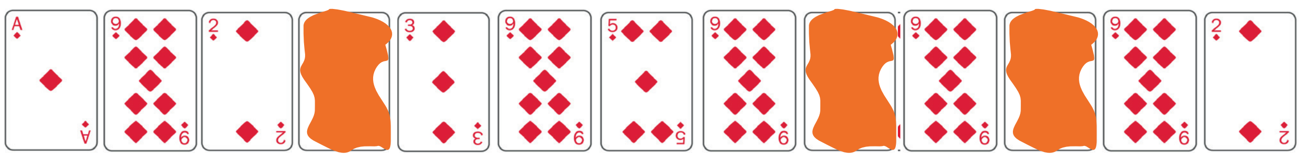
A) 

B) 

C) 

Solución

Según el problema, dice que Darío está acomodando las cartas siguiendo un patrón el cual debes identificar para resolver el problema, entonces dicho lo anterior puedes proceder de la siguiente forma:



Se observa que las cartas con el número 9 de diamantes sirven como separadores de las cartas del patrón original, como se puede ver:

- Se inicia con 1 as de diamantes, seguido de un 9 de diamantes.
- Luego un 2 de diamantes, la siguiente carta sería un nueve de diamantes (en la imagen con tinta).
- Luego un 3 de diamantes, seguido de un 9 de diamantes.
- Luego un 5 de diamantes, seguido de un 9 de diamantes.
- Luego un número tapado con tinta, seguido de un 9 de diamantes.
- Luego otro número tapado con tinta, seguido de un 9 de diamantes.
- Finaliza con un 2 de diamantes.

Ya hemos identificado entonces, que la primera carta tapada con tinta es un 9 de diamantes. Ahora, para determinar las otras dos, debemos averiguar el patrón que siguen los números entre los separadores, observamos que son:

- As de diamantes.
- 2 de diamantes.
- 3 de diamantes.
- 5 de diamantes.
- Desconocido.
- Desconocido.
- 2 de diamantes.

Sabemos que el as valdría uno, observamos que aparece 1, 2, 3, 5, que puede obtenerse de la siguiente forma: 1, 2, 1+2=3, 2+3=5, dando una serie cuyo término siguiente se obtiene de la suma de los dos anteriores.

Sin embargo, si continuamos: 1, 2, 1+2=3, 2+3=5, 3+5=8, en el ámbito de las cartas no se puede pasar a números mayores porque no tendríamos como representarlos.

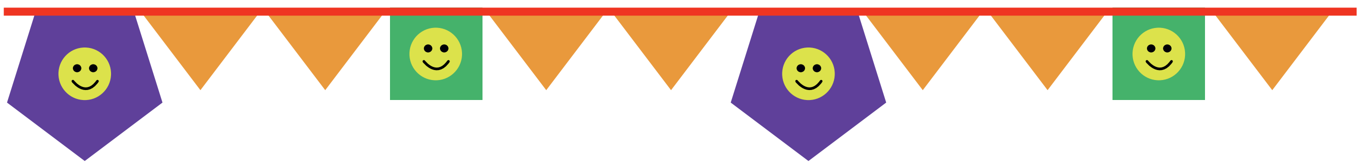
Esta serie se conoce como serie de Fibonacci: la suma del siguiente número es la suma de los dos anteriores: 1, 2, 3, 5, 8, ..., además debes tener en cuenta que las cartas llegan hasta el 10 en forma de número y luego el rey la reina, la baraja no está calibrada (no tiene las mismas cartas que una baraja original), entonces a la hora de sumar 8+5 no se obtiene 13 sino que vuelve a iniciar el patrón. Por lo que la serie vuelve a reiniciar. Así que sería:

- As de diamantes, seguido de un 9 de diamantes.
- 2 de diamantes, seguido de un 9 de diamantes (en la imagen con tinta).
- 3 de diamantes, seguido de un 9 de diamantes.
- 5 de diamantes, seguido de un 9 de diamantes.
- 8 de diamantes (en la imagen con tinta), seguido de un 9 de diamantes.
- As de diamantes (en la imagen con tinta), seguido de un 9 de diamantes.
- 2 de diamantes, seguido de un 9 de diamantes.

Y así sucesivamente, repitiéndose el patrón cada 10 cartas.

Entonces en la primera mancha debe ir un 9 de diamantes, en la segunda mancha un 8 de diamantes y en la tercera mancha un as de diamantes, lo que hace que sea B, la respuesta correcta.

7. Pancho está decorando para el cumpleaños de su papá, por lo que realiza tres tipos de figuras geométricas de cartulina de lado 15 *cm* y las cuelga en el techo, siguiendo una secuencia como se observa en la imagen.



Si continúa agregando figuras, hasta completar una línea de decoración de 435 *cm* de largo, ¿cuál es la última figura de la secuencia?

A) Triángulo
B) Cuadrado
C) Pentágono

Solución
De la situación mostrada debes visualizar las figuras y extraer los siguientes datos:

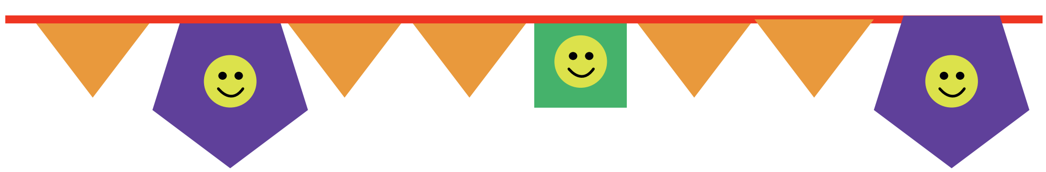
La extensión de la decoración es de 435 *cm*.

Los lados de las figuras que conforman la decoración son de 15 *cm* cada lado.

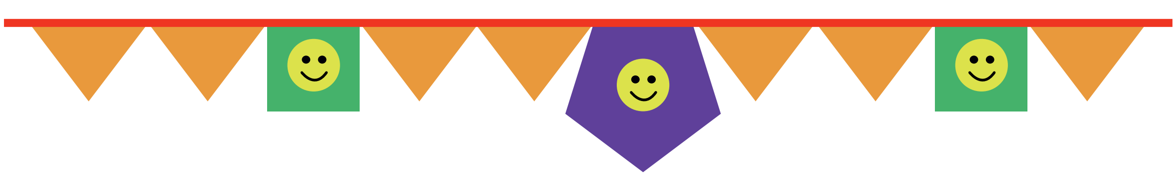
A partir de la información de la imagen puedes determinar cuál es la parte que se repite y cual es su longitud:

Como puedes ver, después de esa primera secuencia el patrón vuelve a iniciar: Pentágono, dos triángulos, un cuadrado, dos triángulos y así sucesivamente hasta sumar 435 cm. Dicho esto se puede concluir que: $\frac{435\ cm}{15\ cm} = 29$ en total hay 29 figuras en la decoración.

Ya se dispone de 11 figuras del patrón mostrado inicialmente, faltan 18 figuras para determinar cuál es la última figura, sin embargo, puedes proceder de la siguiente forma:

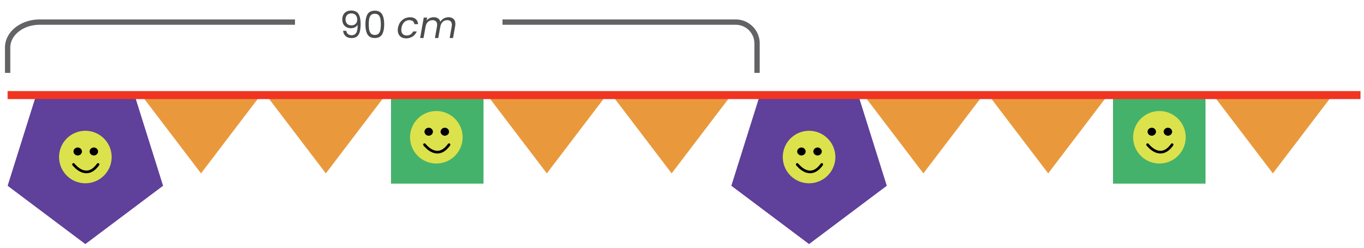


En el patrón anterior, que es la secuencia de figuras que debes seguir hay 120 *cm* y 8 figuras. Continúas con el patrón para un total de 19 figuras encontradas y 285 *cm*, ahora debes hallar las 10 figuras restantes para llegar a concluir que las figuras que faltan son las siguientes:



De esta forma puedes decir que la última figura de la secuencia y la respuesta correcta es la opción A, un triángulo.

Otra forma de resolverla sin continuar realizando el patrón es la siguiente:

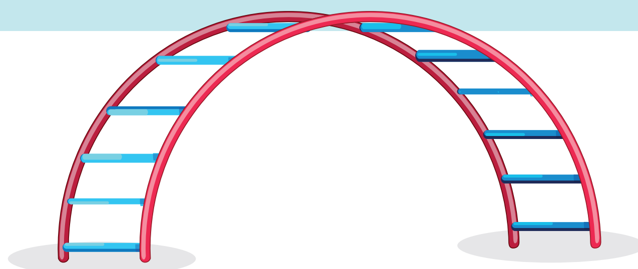


Sabiendo que el patrón que se repite de 6 figuras tiene una longitud de 90cm. Y que son 435cm en total a cubrir, $\frac{435\ cm}{90\ cm} = 4{,}8333$. Aunque la división no es exacta puede representarse como 435 = 90x4 + 75, lo que significa que para cubrir los 435 centímetros se necesitarán cuatro patrones de 90cm completos más otros 15cm de figuras que no llegan a ser un patrón completo. Siguiendo el orden dado, esos 75cm serían $\left(\frac{75}{15} = 5\right)$ cinco figuras más: pentágono, triángulo, triángulo, cuadrado, triángulo. Por lo que la última figura será un triángulo.

8. Para construir el siguiente juego del parque de niños, formado por dos tubos que forman una escalera en forma de semicircunferencia, se utilizaron aproximadamente 1918,8 centímetros de tubo. Si la distancia entre la base del inicio y la del final de la escalera es de 4,2 metros aproximadamente.

¿Cuántas barandas horizontales de medio metro tiene la escalera?

A) 9
B) 11
C) 12



Solución

Para este problema puedes ver lo siguiente:

El diámetro de la semicircunferencia es 4,2 m por lo que su radio es 2,1 *m*. Pasamos eso a centímetros, 2,1 x 100 = 210 centímetros.

Los dos tubos que forman la escalera, si se juntan se forma una circunferencia completa, o si quieres, puedes encontrar la medida de esos tubos y multiplicarlo por 2, que sería lo mismo que sumarlo dos veces.

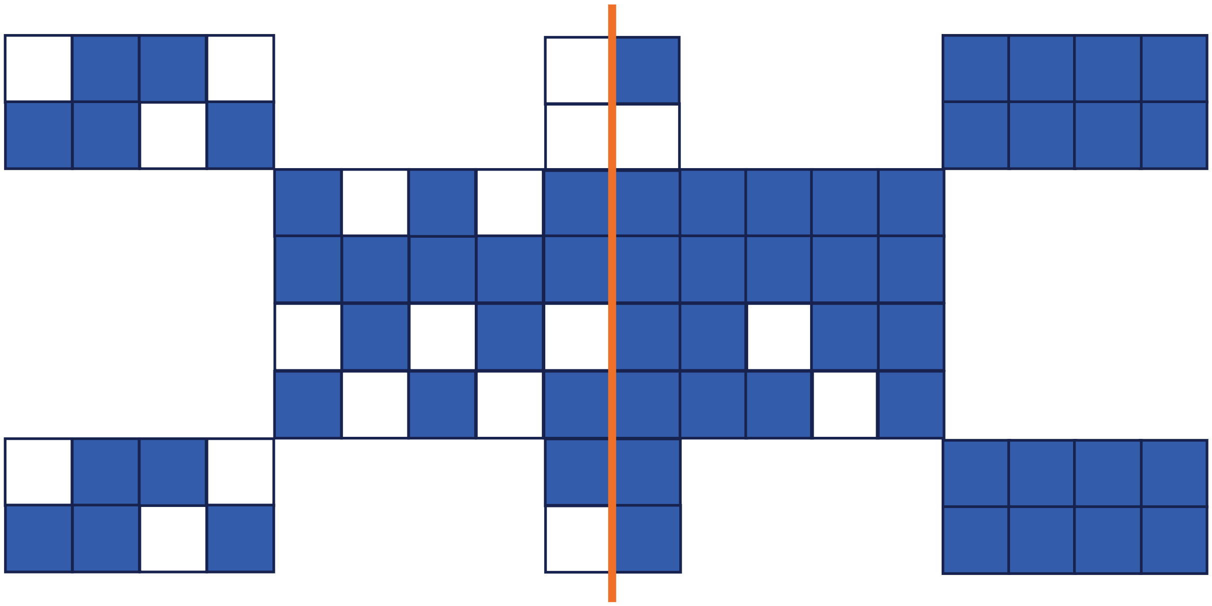
$$C = 2 \times \pi \times r$$
$$C = 2 \times (3{,}14) \times (210\ cm)$$
$$C = 1318{,}8\ cm$$

La circunferencia completa, que es lo mismo que las dos medias circunferencias que forman los tubos, utilizando el valor aproximado de 3,14 para π, da como resultado un valor aproximado de 1318,8 centímetros.

Y si restamos ese resultado a la totalidad del tubo utilizado:

1918,8 *cm* - 1318,8 *cm* = 600 *cm*, es decir, 6 *m* de tubo sobrante y como nos piden determinar la cantidad de barandas horizontales de medio metro utilizadas para construir la escalera. Dividimos los 6 *m* de tubo restante por 0,5 *m* que equivale a la medida de cada baranda y el resultado es 12 barandas.

9. Considere la siguiente figura

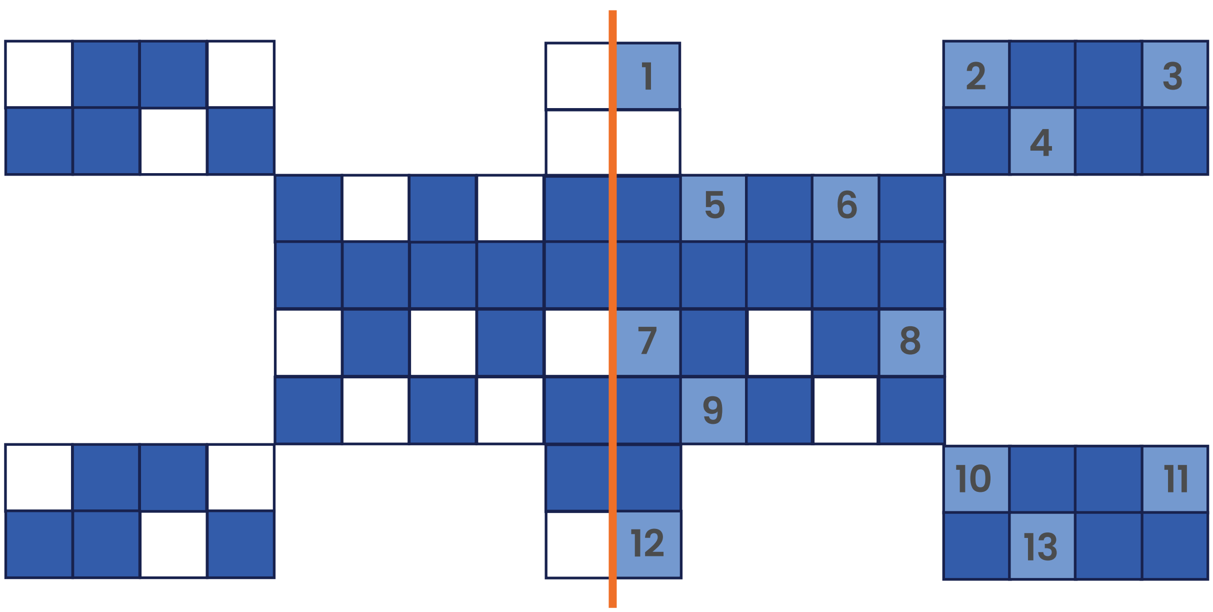


¿Cuántos cuadritos hay que pintar de blanco para poder trazarle a la figura un eje de simetría vertical?

Solución

Como puedes ver y según lo que plantea el enunciado del problema debes contar cuántos cuadritos hay que pintar de blanco para que la línea roja del medio represente el eje de simetría de la figura. Para ello debes ir ubicando fila por fila cuáles son los cuadritos, que deberían estar en blanco para que la figura de la derecha del eje de simetría sea idéntica a la de la izquierda del eje. Puedes ir enumerando y obtener el total inmediatamente o sumarlos por cada fila y sumar todos los resultados obtenidos.

Si la parte de la derecha de la figura es el reflejo el simétrico de la figura de la izquierda, los cuadritos homólogos deben ser del mismo color. Si empezamos a observar en la de la derecha hay más cuadritos azules, por lo que es de ese lado del eje de simetría donde debemos pintar de blanco algunos cuadritos, ahora lo que corresponde es identificar específicamente cuáles, comparando cada cuadrito con su homólogo, para luego sumar el total de cuadritos a pintar de blanco. Podemos hacerlo fácilmente sobre la figura:



Para un total de 13 cuadritos.

10. Marcela ha ahorrado durante varios meses 145 000 colones, ella quiere comprar una blusa y un pantalón que vio en la tienda, pero no recuerda el precio de cada artículo, solo recuerda que:

- La blusa vale un décimo del total del dinero ahorrado.
- El pantalón tiene un valor de un octavo del total del dinero ahorrado.

¿Qué porcentaje del dinero ahorrado representa la compra realizada por Marcela?

Solución

Para proceder con este problema debes tomar en cuenta lo que recuerda Marcela de los valores de la tienda entonces debes tomar el monto total ahorrado y multiplicarlo por cada fracción y obtener el valor real de cada artículo, puedes hacerlo de la siguiente forma:

₡ 145 000 x $\frac{1}{8}$ = ₡ 14 500, el valor real de la blusa es de ₡ 14 500.

₡ 145 000 x $\frac{1}{8}$ = ₡ 18 125, el valor real del pantalón es ₡ 18 125.

Ahora debes sumar los montos para encontrar el valor total de la compra.

₡ 14 500 + ₡ 18 125 = ₡ 32 625

Ahora debes averiguar el porcentaje que representa la compra, por lo que puedes utilizar la regla de tres y determinar el porcentaje:

₡	%
145 000	100
32 625	X

Una vez ordenados los datos, realizo la operación correspondiente, escribiendo una equivalencia conveniente intentando que el valor desconocido quede en el numerador de la primera fracción:

$$\frac{x}{32\,625} = \frac{100}{145\,000} \Longrightarrow \frac{32\,625 \times 100}{145\,000} = x \Longrightarrow x = 22{,}5\%$$

Entonces el porcentaje que representa la compra total con respecto al dinero ahorrado por Marcela es 22,5%.

Otra forma de abordar este mismo problema es trabajando solamente con las fracciones, sin calcular los precios del pantalón y de la blusa. En este caso, con la información de lo que recuerda Marcela se determina, *T* es el total del dinero ahorrado:

- Si la blusa vale un décimo del total del dinero ahorrado, entonces es $\frac{1}{10}$ del dinero ahorrado
- Si el pantalón tiene un valor de un octavo del total del dinero ahorrado, entonces es $\frac{1}{8}$ del dinero ahorrado.

La compra total realizada por Marcela será $\frac{1}{10} + \frac{1}{8}$

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2\times5} + \frac{1}{2\times2\times2} = \frac{4+5}{2\times2\times2\times5} = \frac{9}{40}$$

Esto implica que la compra de Marcela representa $\frac{9}{40}$ del total del dinero ahorrado. Como en la pregunta nos piden este dato en porcentaje, lo trasladamos a porcentaje, multiplicándolo por 100:

$$\frac{9}{40} \times 100 = \frac{900}{40} = \frac{45}{2} = 22,5$$

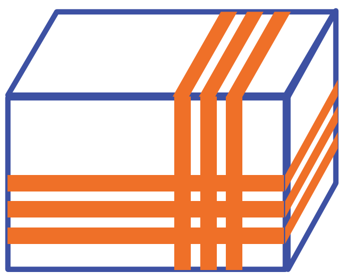
Entonces el porcentaje que representa la compra total con respecto al dinero ahorrado por Marcela es 22,5%.

11. Mariel y Marco decoraron dos cajas exactamente iguales. Las dimensiones de las cajas son:

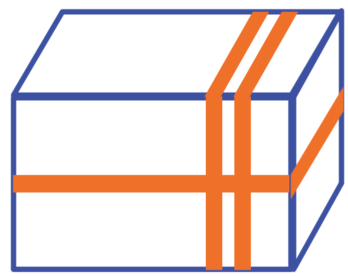
Largo 30 *cm* **Ancho 14 *cm*** **Alto 12 *cm***

Cada uno decoró de manera diferente su caja, pero utilizando la misma carrucha de cinta. En la siguiente imagen se muestra como quedó decorada cada una de las cajas.

Caja que decoró Mariel



Caja que decoró Marco



Si la “carrucha” de cinta trae 10 metros, ¿cuántos metros de cinta sobró?

Solución

Una opción, para dar respuesta a este problema es iniciar determinando la cantidad de cinta utilizada por ambas personas y luego encontrar cuanto sobró.

Se puede realizar la conversión de centímetros a metros de la cinta con la que van decorando cada cara de la caja y trabajar directamente en metros. Otra opción es trabajar en centímetros y al final realizar la conversión de centímetros a metros. Se presentan ambas alternativas una al lado de la otra, ya que eso no altera el razonamiento del problema.

Suponiendo que lo usual al decorar una caja es girar la cinta a todo el rededor de la caja. Es importante considerar, al contar la cantidad de cinta que utilizan para decorar la caja, que en la imagen la caja tiene una cara visible que está decorada, pero hay otra cara paralela (no visible), que también estaría decorada de la misma forma. Así por ejemplo, en la caja que decora Marco se observa una línea horizontal de cinta en la cara frontal, la cual gira alrededor de la caja y por ende en la cara trasera de la caja, que no es visible, también habría una línea horizontal de cinta igual.

Considerando esto, se determina la cinta utilizada por cada persona:

Caja que decoró Mariel	
Si se trabaja en centímetros	Si se trabaja en metros
(3+3) x 30 cm = 180 cm	(3+3) x 0,30 m = 1,80 m
(3+3) x 14 cm = 84 cm	(3+3) x 0,14 m = 84 cm
(3+3) x 12 cm = 72 cm	(3+3) x 0,12 m = 0,72 m
(3+3) x 14 cm = 84 cm	(3+3) x 0,14 m = 84 cm
180cm+84cm+72cm+84cm=420cm	1,8m+0,84m+0,72m+0,84m=4,2m

Caja que decoró Marco	
Si se trabaja en centímetros	Si se trabaja en metros
(1+1) x 30 cm = 60 cm	(1+1) x 0,30 m = 0,30 m
(1+1) x 14 cm = 28 cm	(1+1) x 0,14 cm = 0,28 cm
(2+2) x 12 cm = 48 cm	(2+2) x 0,12 m = 0,48 m
(2+2) x 14 cm = 56 cm	(2+2) x 0,14 m = 0,56 cm
60cm+28cm+48cm+56cm= 192cm	0,6m+0,28m+0,48m+0,56m=1,92m

Ahora determina la diferencia entre la cantidad de cinta de la carrucha y la cantidad de cinta utilizada para determinar la cinta restante:

- Si se trabajó en centímetros:
10m de la carrucha son 1000 centímetros de cinta.
420cm que utilizó Mariel y 192cm que utilizó Marco:

$$420 + 192 = 612$$

612 centímetros de cinta utilizada.

$$1000 - 612 = 388$$

Sobran 388 cm de cinta, que equivalen a 3,88 metros.

- Si se trabajó en metros:
10 metros de la carrucha.
4,2m que utilizó Mariel y 1,92m que utilizó Marco:

$$4{,}2 + 1{,}92 = 6{,}12$$

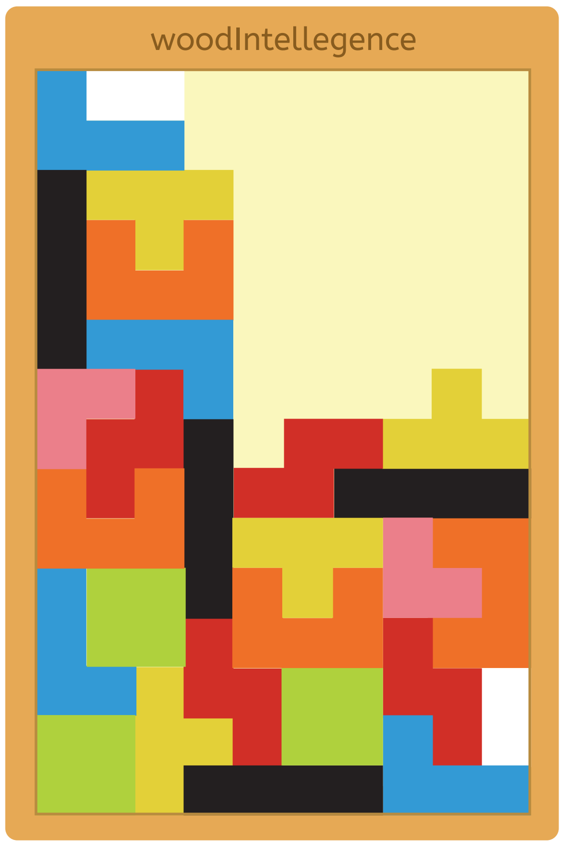
6,12 metros de cinta utilizada.

$$10 - 6{,}12 = 3{,}88$$

Sobran 3,88 metros de cinta.

12. Si la pieza blanca en forma de rectángulo del rompecabezas de la imagen tiene 8 cm^2 de área.

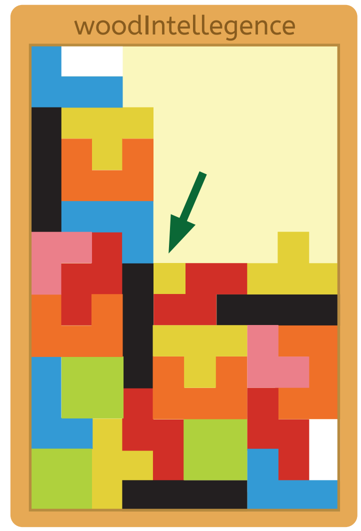
¿Cuál es el área de la parte del rompecabezas que falta completar?



Solución

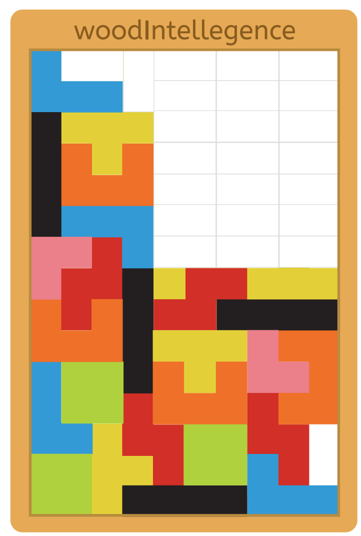
Para resolver este problema necesitas saber que la pieza blanca mide 8 cm^2 de área, como puedes ver esa pieza es un rectángulo, formado por dos cuadraditos. En este caso como sabemos que el área es 8 cm^2 y observando que podría descomponerse en dos cuadrados. Podemos decir, que la pieza blanca es un rectángulo de 2 *cm* de ancho por 4 *cm* de largo y puede descomponerse en dos cuadrados de 2x2 *cm*.

Se observa, además, que todas las demás piezas que forman el rompecabezas podrían también descomponerse en cuadritos de 2x2 *cm*. Por ejemplo, en el tablero hay un cuadrito vacío a la par de la pieza roja y al otro lado de esa misma pieza hay un cuadrito amarillo que sobresale.



Puedes suponer que mueves ese cuadrito sobrante y lo colocas en el cuadrito que está vacío que viste inicialmente, el cual, lo verías de la forma que se muestra en la imagen. Ahora puedes averiguar el área de forma más fácil.

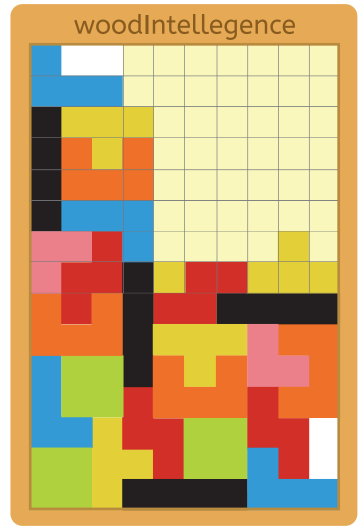
Una forma de resolver el problema es usar la pieza blanca y colocarla de forma que se determina la cantidad de fichas blancas que caben en una fila, para este caso, puedes colocarlas de forma horizontal (acostada). Así lograras determinar que caben 3 piezas, notando de que si colocas la pieza horizontal calza con la un cuadrito de medida 4 cm^2 de área y es así como deberás contar la cantidad de fichas que vas a usar y luego multiplicarlo por el área de la ficha para determinar el área total.



Así en la imagen anterior hay 21 fichas blancas de forma horizontal y una vertical, así cuentas 22 piezas blancas y efectúas el siguiente desarrollo:

$$22 \text{ piezas} \times 8\ cm^2 = 176\ cm^2$$

Otra forma de resolver el problema es trazar líneas horizontales y verticales en la imagen dada, de forma que se descompongan todas las piezas en cuadrados de 2x2 cm^2. Como se observa en la imagen.



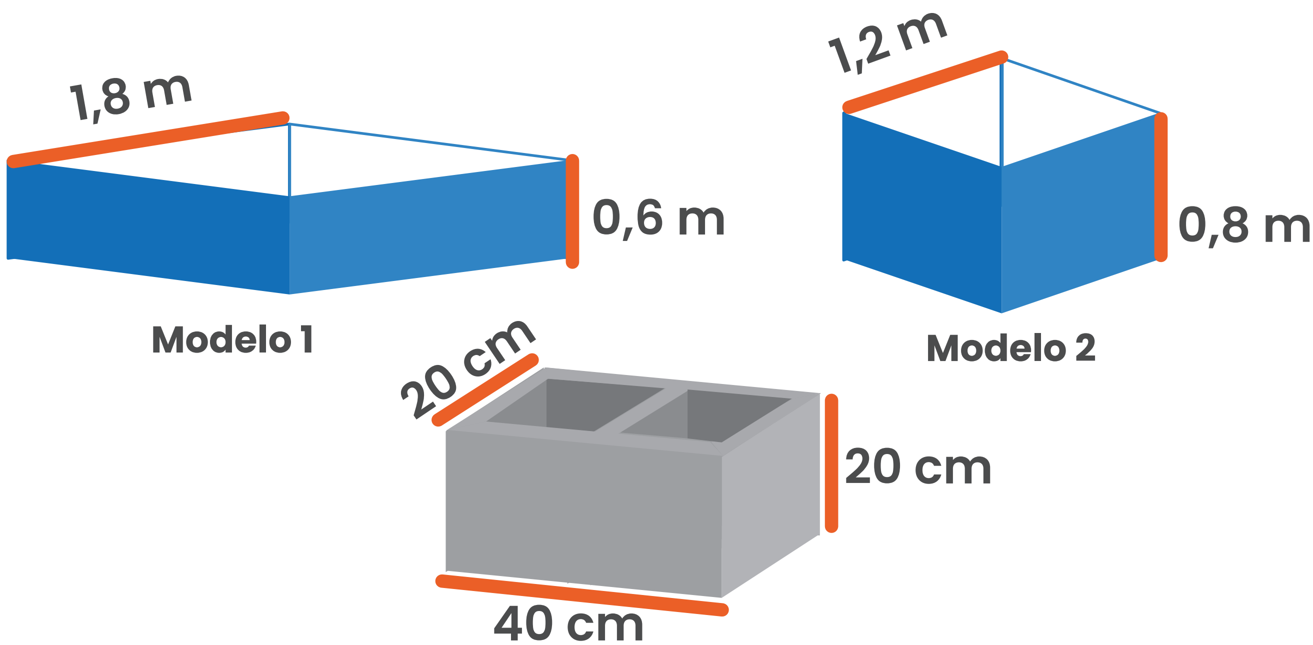
De esta forma se puede determinar la cantidad de cuadritos de medida 4 cm^2 de área que hacen falta para completar el rompecabezas. Luego contar la cantidad de cuadritos y multiplicarlo por el área de cada uno para determinar el área total.

Así en la imagen anterior hay 44 cuadritos faltantes y efectúas el siguiente desarrollo:

$$44 \text{ cuadritos x } 4\ cm^2 = 176\ cm^2$$

13. Doña Mariel quiere elaborar una jardinera con forma de rombo. El albañil le propone dos modelos como se muestra en la imagen. Para cada modelo da un croquis con las respectivas dimensiones e indica a doña Mariel que requiere comprar block con las medidas que se muestra a un precio de ₡ 795 por cada block. Ella dispone de ₡ 41 000.

¿Cuánto dinero le sobrará si selecciona el más económico?

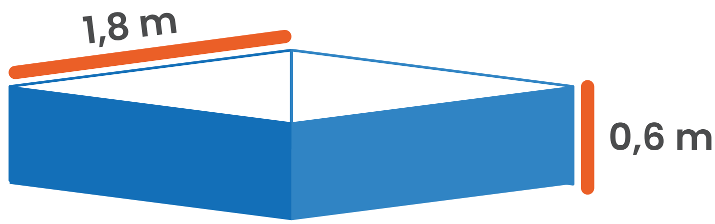


Solución

Debes determinar primeramente la cantidad de material que se debe utilizar para construir cada modelo dadas sus medidas y las de los blocks, dado que las medidas del block están en centímetros y las de las jardineras en metros entonces debes pasar los metros a centímetros (o viceversa), además debes notar que las medidas de los blocks deben encajar perfectamente en la figura, no se pierde ni hay exceso de material.

Puedes proceder de la siguiente forma:

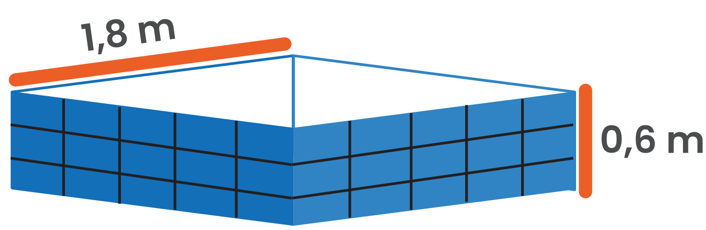
Modelo 1
1,8 m = 180 cm
0,6 m = 60 cm



Modelo 1

Para este primer modelo el lado mide 180 cm por lo que si se contabilizan se necesitan 4,5 blocks para tener 180 cm por cada lado, otra forma de averiguarlo es dividiendo 180 por 40 que es el largo de cada block (180÷40=4,5). Serían 4,5 blocks de largo por lado.

Luego, la altura es de 60 cm por lo que según las medidas del block se necesitan 3 blocks de altura (60÷20=3).

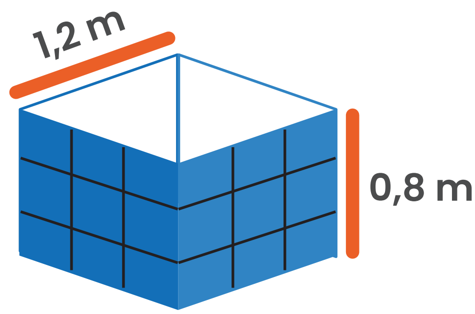


Modelo 1

Por lo que, como se aprecia en la figura, cada pared de la jardinera requiere 4,5 blocks de largo y tres de alto, para un total de (4,5×3=13,5) 13,5 blocks por pared.

Como son cuatro paredes se tienen (13,5x4=54) 54 blocks lo que daría un costo total de (54x795=42 930) ₡ 42 930. Por lo que con el dinero que tiene ni siquiera le alcanzaría.

Modelo 2
1,2 m = 120 cm
0,8 m = 80 cm



Modelo 2

Para este modelo, según los datos el lado mide 120 cm por lo que si se contabilizan se necesitan 3 blocks para tener 120 cm por cada lado, otra forma de averiguarlo es dividiendo 120 por 40 que es el largo de cada block (120÷40=3). Serían 3 blocks de largo por lado.

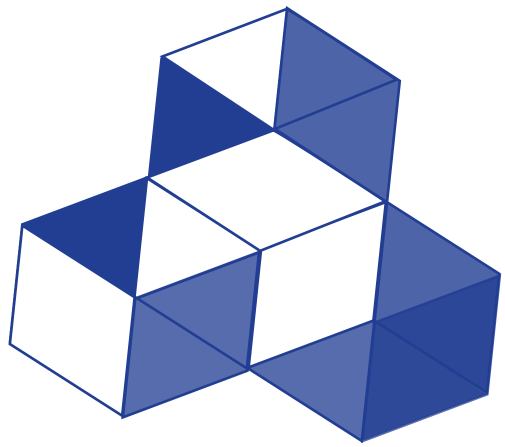
Luego, la altura es de 80 cm por lo que según las medidas del block se necesitan 4 blocks de altura (80÷20=4).

Por lo que, como se aprecia en la figura, cada pared de la jardinera requiere 3 blocks de largo y 4 de alto, para un total de (4×3=12) 12 blocks por pared.

Como son cuatro paredes se tienen (12x4=48) 48 blocks lo que daría un costo total de (48x795=38 160) ₡ 38 160. Por lo que es la opción más económica.

Doña Mariel tiene ₡ 41 000 por lo que le sobran
₡ 41 000 - ₡ 38 160 = ₡ 2 840.

14. Doña La siguiente figura se encuentra formada por hexágonos regulares y triángulos equiláteros todos iguales (de igual medida):

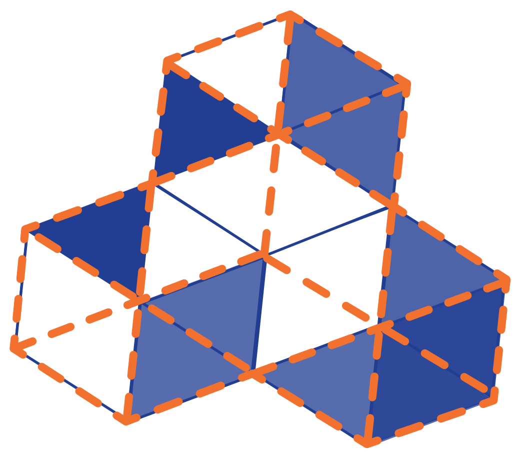


Determine ¿Qué fracción de la figura se encuentra **sin pintar** de color negro?

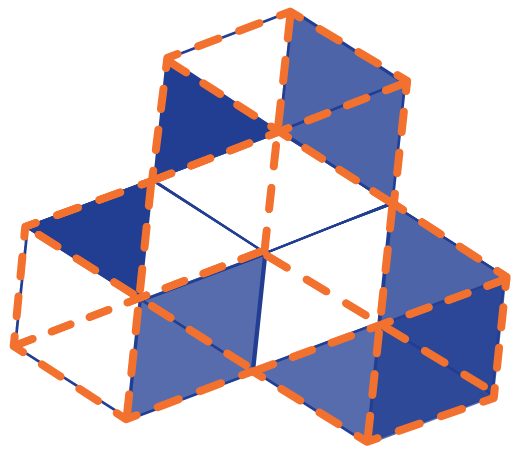
Solución

Puedes observar en la figura dada, que cada hexágono está conformado por 6 triángulos equiláteros y hay 3 hexágonos unidos por los lados comunes.

Por lo que en total la figura tiene 18 triángulos equiláteros que conforman los tres hexágonos regulares. Si resaltamos, como se muestra en la figura adjunta, las líneas que delimitan esos triángulos equiláteros podríamos verlo con más claridad.



Ahora podemos identificar que hay 18 triángulos equiláteros y dentro de ellos contar cuantos hay sin pintar, de la siguiente manera:



Entonces para determinar la fracción lo haces de la siguiente forma.
18 triángulos equiláteros en total, 8 de ellos sin pintar:

$$\frac{8}{18} = \frac{4}{9}$$

Por lo que la opción correcta es la opción B.

15. Miguel quiere comprar un lego por internet. Lo ha visto en páginas distintas, en una el precio está en euros y en otra en dólares, con las siguientes condiciones:

Página 1	Página 2
 Precio indicado Más 1% de comisión. Envío gratis.	 Precio indicado, sin comisión. Envío 5€
Tipo de cambio: 685.	**Tipo de cambio: 735.**

Si el pago lo hace en colones, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

A) Es igual el precio final en cualquiera de las páginas.
B) Es más económico comprar en la página 2.
C) Es más económico comprar en la página 1.

Solución
Para esto debes analizar cada caso por lo que puedes proceder de la siguiente forma:

Página 1
El juego cuesta $89, pero a eso debe sumarse el 1% de comisión y no se cobra envío. Por lo tanto, iniciamos sacando la comisión. El 1% de $89 es: $89 \times 1 \div 100 = 89 \div 100 = 0{,}89$

Ahora se le suma al precio original ese monto que en total es:

$$\$89 + \$0{,}89 = \$89{,}89$$

Para saber el precio en colones y determinar su costo debes realizar el tipo de cambio, en este caso, debes multiplicar el monto total por el tipo de cambio (₡ 685), de la siguiente forma:

$$89{,}89 \times 685 = 61\,574{,}65$$

Si compra el juego en la página 1 pagaría en total ₡ 61 574,65.

Página 2
El juego cuesta 80€ y se le debe sumar 5€ de envío que suman 85€. Para saber el precio en colones y determinar su costo debes realizar el tipo de cambio, en este caso, debes multiplicar el monto total por el tipo de cambio (₡ 735), de la siguiente forma:

$$85 \times 735 = 62\,475$$

Si compra el juego en la página 2 pagaría en total ₡ 62 475.
Por lo que la opción correcta es la C, es más económico comprar en la página 1.

16. En un salón de juegos se ganan tiquetes por cada victoria, los que pueden cambiarse por premios, según la siguiente descripción:

- Nivel 1, golosinas
- Nivel 2, chocolates
- Nivel 3, figuritas de personajes
- Nivel 4, peluches.

Cada diez premios de un nivel equivalen a un premio del siguiente nivel. Si se sabe que con los tiquetes ganados, sin que sobre ninguno:

- Patricia con sus tiquetes piensa adquirir: 14 golosinas, 12 chocolates y 6 figuritas.
- Darío con sus tiquetes piensa adquirir: 8 golosinas, 9 chocolates y 3 figuritas.

Si Patricia y Darío unieran sus tiquetes, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

A) Solo podrían comprar 22 chocolates.
B) Podrían comprar 1500 golosinas.
C) Podrían comprar un peluche.

Solución
Para este problema debes destacar lo que dice: “cada diez premios de un nivel equivalen a un premio del siguiente nivel”, entonces al sumar todos los tiquetes podrás comprobar cuál de las afirmaciones es verdadera.

Para empezar tomamos las cantidades de los premios que cada uno puede obtener, para determinar la cantidad de tiquetes que tendrían, como sigue:

	Patricia	Darío	Juntos
golosinas	14	8	22
chocolates	12	9	21
figuritas	6	3	9

Utilizando que “cada diez premios de un nivel equivalen a un premio del siguiente nivel” trasladamos los tiquetes disponibles de golosinas a un nivel superior (señalados en azul), luego los de chocolates disponibles a un nivel superior (señalados en verde), y finalmente los de figuritas resultantes a un nivel superior (señalados en rojo) con lo que obtendríamos:

	Patricia	Darío	Juntos	Equivalencia	Equivalencia	Equivalencia
golosinas	14	8	22	2	2	2
chocolates	12	9	21	21+2=23	3	3
figuritas	6	3	9	9	9+2=11	1
peluches	0	0	0	0	0	0+1=1

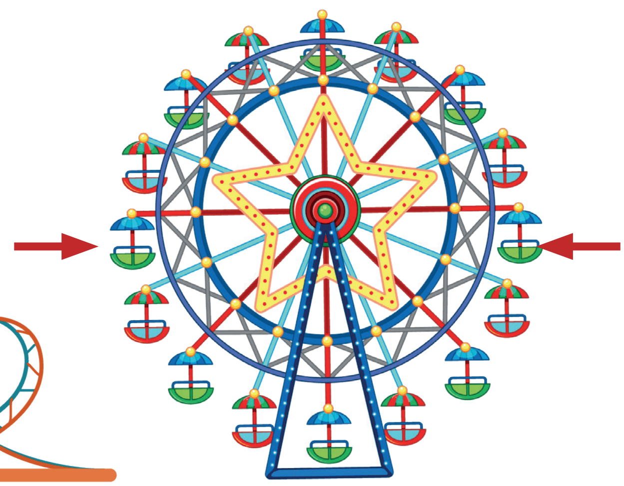
Finalmente, realizando estos cambios con las equivalencias planteadas, obtendríamos que si Patricia y Darío juntaran sus tiquetes podrían obtener un peluche, que es el premio mayor, una figurita, 3 chocolates y 1 golosinas.

Si pasaran todo a golosinas, podrían comprar 22+210+900=1132, por lo que no llegarían a las 1500 golosinas. Y si pasaran todo a chocolates, podrían comprar 23+90 = 113, por lo que es falso que solo podrían comprar 22. Por lo que la respuesta correcta es la C).

17. Fabián y Marta se encuentran sentados a lados opuestos de la Rueda de Chicago (en las flechas indicadas). Si la distancia que recorre el carrito de la montaña rusa equivale a dos vueltas completas de la rueda de Chicago y sabemos que la distancia recorrida por la montaña rusa es de aproximadamente 100,48 metros.

¿Cuál es la distancia aproximada entre Fabián y Marta?

Montaña Rusa



Rueda de Chicago

Solución

Se indica que la distancia que recorre el carrito de la montaña rusa equivale a dos vueltas completas de la rueda de Chicago, eso quiere decir que la distancia que se recorre en la vuelta de la rueda de Chicago es la mitad de la distancia recorrida en la montaña rusa.

La distancia recorrida por la montaña rusa es de aproximadamente 100,48 metros, por lo que la de la rueda de Chicago será
(100,48 ÷ 2= 50,24) 50,24m.

Observa que el camino que hace la rueda de Chicago es una circunferencia cuya longitud es de 50,24 m entonces, para averiguar la distancia entre Marta y Fabián, deberíamos determinar el diámetro de la rueda de Chicago, que si vemos en la imagen es justo la distancia entre ambos pasajeros.

Sabemos que $C = 2 \times \pi \times r$ y además que $C = 50{,}24$ por lo que ambas expresiones al estar igualadas a C son equivalentes. Si dividimos 50,24 por dos, obtendríamos que el resultado es igual al producto de $\pi \times r$, luego ambos por 3,14 como valor aproximado de π y así obtenemos el valor del radio de la rueda de Chicago.

	$C = 2 \times \pi \times r$	$C = 50{,}24$
Igualo las dos expresiones	$2 \times \pi \times r$	$= 50{,}24$
Divido ambos lados por dos	$\pi \times r$	$= 25{,}12$
Divido ambos lados por 3,14	r	$= 8$

Como el radio es de 8 m y Fabián y Marta están a lados opuestos entonces se debe multiplicar al radio por 2 ya que la posición de ambos forma un diámetro, entonces el diámetro será de (2 x 8 =16) 16 metros

18. Un contenedor de agua en forma de cilindro tiene 12cm de radio. Su altura es el triple del radio y está al 50% de su capacidad máxima.

¿Cuántos litros aproximadamente, le hacen falta para estar a tres cuartos de su capacidad máxima?

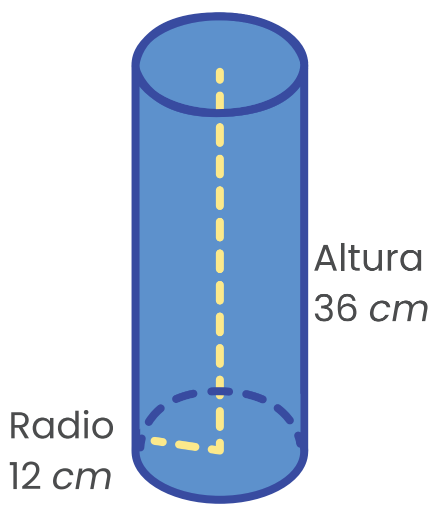
Solución

Para este problema debes destacar las características que tiene el cilindro para ello, debes ver que:

Radio de la base = 12 cm

Altura del cilindro es 3 veces la medida del radio = 3 x 12 = 36 cm

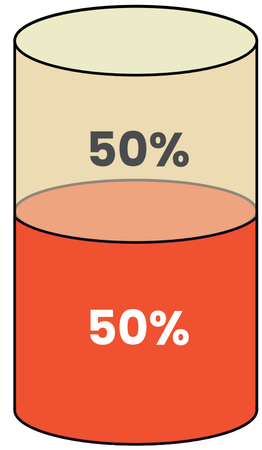
Además de lo anterior puedes realizar un dibujo para guiarte, tal como el que sigue:



Para determinar la capacidad del contenedor debes calcular el volumen del cilindro, mediante su fórmula:

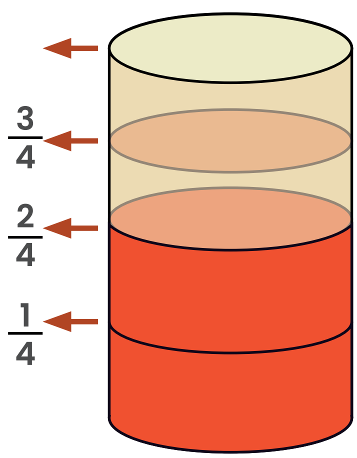
$V_{cilindro} = \pi \times r^2 \times h$
$V_{cilindro} = \pi \times r \times r \times h$
$V_{cilindro} = \pi\ cm \times 12\ cm \times 12\ cm \times 36\ cm$
$V_{cilindro} = \pi\ cm \times 144\ cm \times 36\ cm$
$V_{cilindro} = \pi\ cm \times 5184\ cm^2$
$V_{cilindro} = 16\ 277{,}76\ cm^3$

Ahora según el problema dice que el contenedor está a la mitad de su capacidad por lo que se debe dividir por 2 que es el equivalente al 50%, entonces se encuentra con (16 277,76 ÷ 2 = 8138,88) 8 138,88 cm^3 de agua.



El problema nos pregunta cuantos litros hacen falta para que se encuentre a $\frac{3}{4}$ de su capacidad.

Sabemos que está a $\frac{1}{2}$ de la capacidad, que es equivalente a $\frac{2}{4}$ por lo que le falta $\frac{1}{4}$ más para estar a $\frac{3}{4}$ de su capacidad.



Si sabemos que 8 138,88 cm^3 es un medio, entonces la mitad de eso será un cuarto. Por lo que le hacen falta (8138,88÷2=4069,44) 4069,44 cm^3 de agua para estar a tres cuartos de su capacidad.

Ahora debemos convertir esa cantidad en litros, para ello recordemos que 1 litro = 1 dm^3, por lo que primero convertimos 4069,44 cm^3 a decímetros, que serían 4,06944 dm^3. Recuerda que cuando tienes longitudes para realizar conversiones divides o multiplicas, según sea el caso, por 10, en este caso al ser medidas cubicas divides o multiplicas por 1000.

Entonces hacen falta aproximadamente 4,07 litros.

19. Considere la siguiente información:

- En Costa Rica hay 7 provincias de las cuales 3 tienen costa.
- En Costa Rica hay 82 cantones y 488 distritos.

Xinia y su hermana han escrito los nombres de las 7 provincias y las han colocado en una bolsita. Similarmente, los nombres de los cantones y distritos los han colocado en otra bolsita. Le han dicho a su mamá que saque de cada bolsa un papelito sin mirar. Antes de leer los papelitos Xinia y la hermana comentan:

- **Xinia:** Es más probable que en el papelito de las provincias esté el nombre de una provincia costera que de una provincia sin costa.
- **Hermana:** Es menos probable que, en el papelito de cantones o distritos, haya el nombre un cantón que de un distrito.

A mirar los papelitos tienen:

Cartago **San Carlos**

Al respecto la mamá comenta:

- **Mamá:** Ninguna de las dos tenía razón en su comentario pues ha salido el nombre de una provincia sin costa y de un cantón.

¿Cuáles de ellas está en lo correcto?

A. Xinia
B. Hermana
C. Mamá

Solución

En este problema debes analizar con detalle lo que dijo la Xinia y su hermana:

- **Xinia:** Es más probable que en el papelito de las provincias esté el nombre de una provincia costera que de una provincia sin costa.

Para esta afirmación y por lo estudiado en Estudios Sociales, se tiene que de las 7 provincias:

Provincias con costa	Provincias sin costa
Guanacaste	San José
Limón	Heredia
Puntarenas	Alajuela
Probabilidad: $\frac{3}{7} \times 100 = 42{,}85\%$	Cartago
	Probabilidad: $\frac{4}{7} \times 100 = 57{,}14\%$

Por lo que la afirmación dada por Xinia es falsa, ya que es menos probable que salga una provincia costera.

- **Hermana:** Es menos probable que en el papelito este el nombre un cantón que de un distrito.

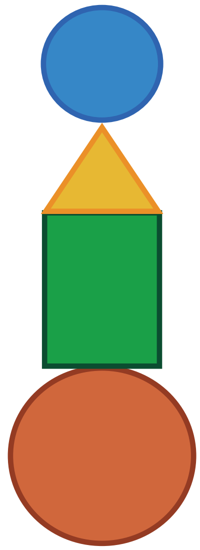
Para la afirmación de la hermana debes destacar que los 82 papelitos con los nombres de los cantones y los 488 que corresponden a los distritos están en una misma bolsita por lo que en total hay 570 papelitos en esa bolsa, entonces podemos realizar el siguiente análisis.

Probabilidad de que salga un cantón	Probabilidad de que salga un cantón
$\frac{82}{570} = \frac{41}{285} \times 100 = 14{,}38\%$	$\frac{488}{570} = \frac{244}{285} \times 100 = 85{,}61\%$

Con lo que se puede concluir que la afirmación dada por la hermana de Xinia es verdadera, opción B.

La afirmación de la madre no es verdadera porque, aunque sale una provincia sin costa y un cantón, Xinia y su hermana no estaban prediciendo lo que iba a salir, sino diciendo cuál caso tenía más probabilidad.

20. En artes Mariela realiza la siguiente figura:



- La altura del triángulo mide 7 cm y es igual a la medida del radio del círculo más pequeño.
- El diámetro del círculo más grande mide el triple del radio del pequeño.

Si desea cubrir el círculo grande con papel de regalo. ¿Cuántos centímetros cuadrados de papel de regalo se necesitarán como mínimo?

Solución

Para la situación planteada debes reconocer los datos dados e ir sacando conclusiones de cada uno de los datos, de la siguiente forma:

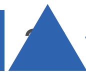
Como preguntan por la cantidad de papel en centímetros cuadrados necesario para envolver el circulo más grande, debemos encontrar el área. El área del círculo está dada por $A = \pi \times r^2$, por lo que necesitamos el radio del círculo, como sabemos que el diámetro mide 21cm y el radio es la mitad del diámetro, entonces el radio es (21÷2=10,5) 10,5 *cm*.

Ahora, utilizando 3,14 como valor aproximado de π, aplicamos la fórmula del área del círculo:

$$A = \pi \times r^2$$
$$A = \pi \times (10{,}5\ cm)^2$$
$$A = 3{,}14 \times 110{,}25\ cm^2$$
$$A = 346{,}185\ cm^2$$

Por lo que se necesita como mínimo 346,185 cm^2 de papel para envolver el circulo más grande.

21. Considere la siguiente sucesión:

4, 7, 12, 19,    67, 84, 103,  ,  199, 228, 259, 292 ...

Si se mantiene el patrón presentado, a cuanto equivale el resultado de la operación:

Solución

A partir de como está compuesta la serie dada, se puede observar que:

4 + 3 = 7 **7 + 5 = 12** **12 + 7 = 19**

Podemos notar que la serie se forma por la suma de los números impares a partir del 3, además la serie inicia por el número 4, comienzan a sumarse los impares al último término y a formarse la serie. Entonces los valores de los términos de la serie se obtienen de la siguiente manera:

4
4 + 3 = 7
7 + 5 =12
12 + 7 =19
19 + 9 = 28
28 + 11 = 39
39 + 13 = 52
52 + 15 = 67
67 + 17 = 84
84 + 19 = 103
103 + 21 = 124
124 + 23 = 147
147 + 25 = 172 ...

Por lo que los valores de las figuras dadas corresponden a:

■	▲	⬢	▬	⬬	▰
19+9=28	28+11=39	39+13=52	103+21=124	124+23=147	147+25=172

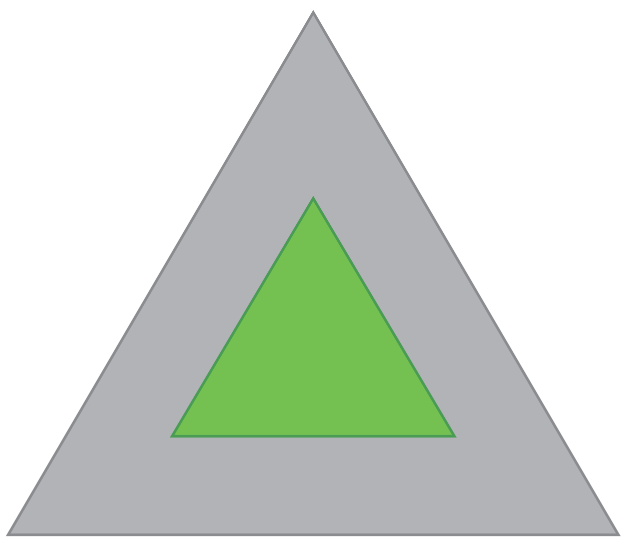
Así el resultado de la operación solicitada es:

⬬ - ▲ = 147 – 39 = 108

22. La siguiente imagen corresponde al patio de una casa, que tiene forma de triángulo equilátero, la parte interna se encuentra cubierta de césped y la demarcada con gris es el espacio con cemento. Sabiendo que:

- La altura del triángulo pequeño es de 3 metros y corresponde a la mitad de la altura del triángulo grande.
- El lado del triángulo grande equivale a 7,4 m
- La razón entre las medidas de la altura entre ambos triángulos es igual a la razón entre las medidas de sus lados.

Según lo anterior, ¿a cuánto equivale el área con cemento?



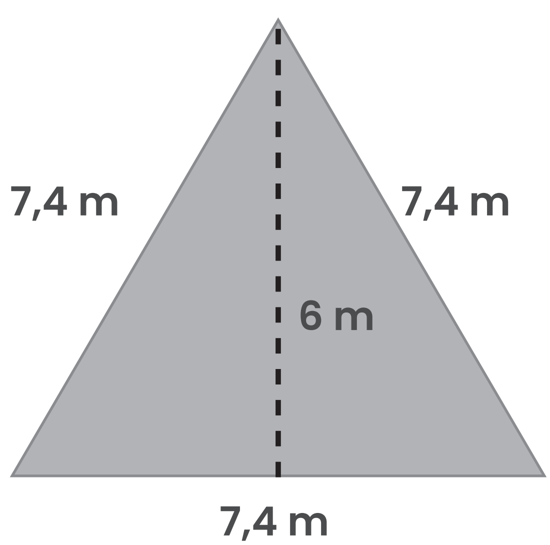
Solución

Para resolver el problema, vamos a identificar todos los datos dados, sea directa o indirectamente:

1) Ambos triángulos son equiláteros
2) La altura del triángulo pequeño es de 3 metros

3) La altura del triángulo pequeño es la mitad de la altura del triángulo grande, entonces la altura del triángulo grande es de (2x3=6) 6 metros.
4) El lado del triángulo grande es 7,4 cm
5) La razón entre las medidas de la altura entre ambos triángulos es igual a la razón entre las medidas de sus lados. Como sabemos que la razón entre las alturas es "la mitad" y la de los lados es la misma, entonces la medida del lado del triángulo pequeño es (7,4÷2=3,7) 3,7 metros.

Ahora, que ya tenemos las medidas de lado y altura de ambos triángulos, vemos que lo que solicitan es el área de la parte gris, sin embargo, hay una parte verde que nos impide calcularlo directamente (el triángulo pequeño), entonces lo que hay que hacer es calcular el área de ambos triángulos, el grande y el pequeño, para luego encontrar la diferencia entre ambas áreas, que sería el área gris.



Del triángulo grande sabemos que:

La altura es 6 m y el lado es 7,4 m

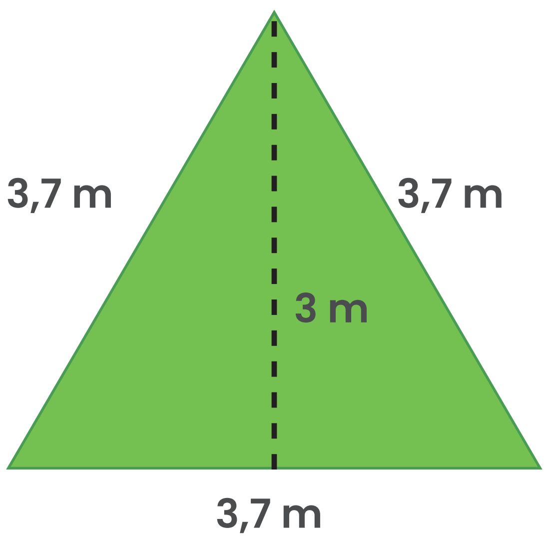
Es un triángulo equilátero por lo que todos sus lados miden lo mismo.

$$A = \frac{b \times h}{2}$$

$$A = \frac{(7{,}4\ m) \times (6\ m)}{2}$$

$$A = \frac{44{,}4\ m}{2}$$

$$A = 22{,}2\ m^2$$



Del triángulo pequeño sabemos que:

La altura es 3 m y el lado es 3,7 m

Es un triángulo equilátero por lo que todos sus lados miden lo mismo.

$$A = \frac{b \times h}{2}$$

$$A = \frac{(3{,}7\ m) \times (3\ m)}{2}$$

$$A = \frac{11{,}1\ m}{2}$$

$$A = 5{,}55\ m^2$$

Ahora debemos efectuar la resta del área del triángulo grande menos el área del triángulo pequeño para encontrar el área gris.

$$22{,}2\ m^2 - 5{,}55\ m^2 = 16{,}65\ m^2.$$

Por lo que el área de color gris equivale a 16,65 m^2

23. El código de la computadora de Manuel está formada por tres números de dos cifras. Su hermano ha puesto los tres números correctos, pero en el orden equivocado.

Si sabe que los tres números son correctos, ¿qué probabilidad tiene de que al elegir otro orden sea el correcto?

Solución

Para que puedas resolver el problema anterior debes tomar en cuenta que, aunque los tres números son de dos cifras, el hermano ya encontró los tres números correctos por lo que solo se debe encontrar la combinación o el orden correcto.

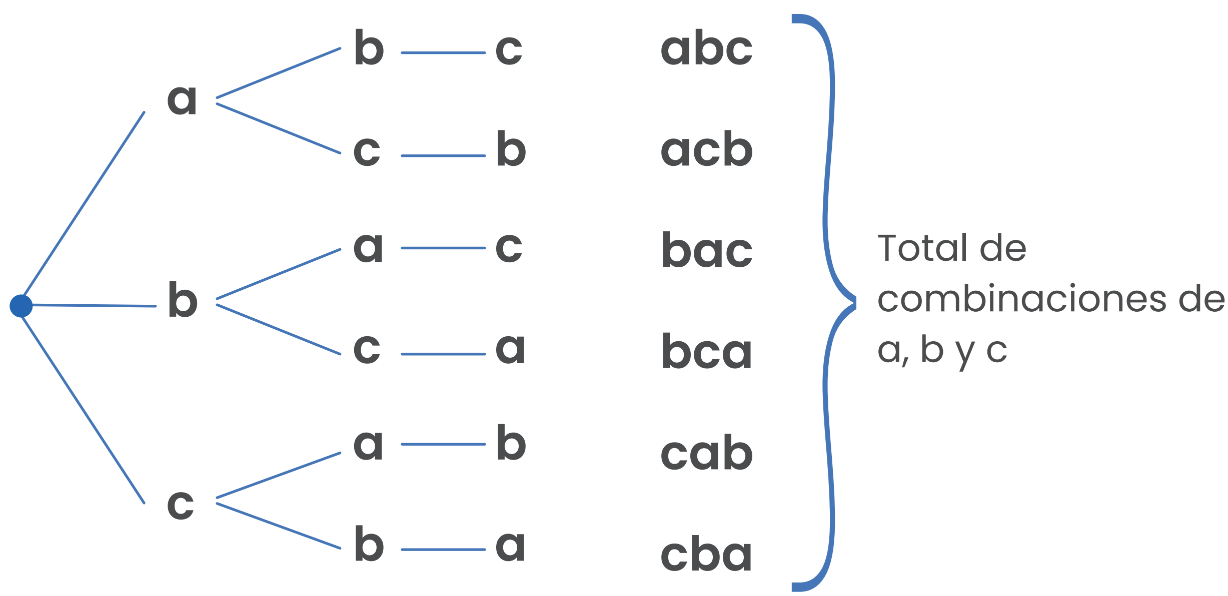
Por lo cual los tres números podrían representarse con A, B y C. Lo que buscamos es el orden en el que esos tres números pueden ser colocados, pero además tomando en cuenta que ya el hermano encontró un orden incorrecto.

Por ejemplo, si los sitios de colocar los números se representan en una tabla, vamos a escribir todas las posibles formas en las que podrían ordenarse esos tres números:

Primero	Segundo	Tercero
A	B	C
A	C	B
B	A	C
B	C	A
C	A	B
C	B	A

Determinamos que hay 6 posibles combinaciones o formas de ordenar esos tres números, sin embargo, ya se utilizó una que era incorrecta por lo que quedarían 5 posibles formas, de las que solo hay una combinación correcta. Por lo que la probabilidad de encontrarla es $\frac{1}{5}$.

Otra forma de visualizar las posibilidades de combinaciones de tres números a, b, y c, corresponde al siguiente diagrama:



Son 6 posibles combinaciones, y, como ya se mencionó al utilizarse una que era incorrecta, quedarían 5 posibles formas de las que solo hay una combinación correcta. Por lo que la probabilidad es $\frac{1}{5}$.

24. En la siguiente imagen el lado del rombo grande es el doble del lado del pequeño y sus diagonales tienen la misma característica. Si el área del rombo pequeño es 27 cm^2, además su diagonal menor corresponde al doble del valor del segundo número primo más pequeño.

¿Cuál será, en centímetros, la medida de la diagonal mayor del rombo más grande?

Solución

Debes observar muy bien las características dadas de las figuras del problema para extraer los datos correspondientes, ya sea que vengan dados de forma directa o de forma indirecta.

Analizamos cada afirmación extrayendo los datos correspondientes, representaremos los datos del rombo pequeño con naranja y del rombo grande con azul:

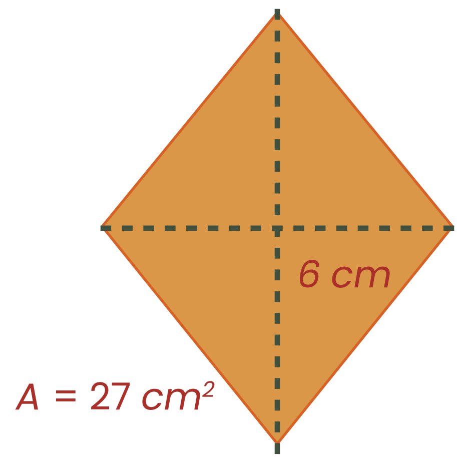
Información dada	Resumen de datos
El lado del rombo grande es el doble del lado del pequeño.	$l = 2 \times l$
Las diagonales de ambas figuras cumplen la misma característica que los lados.	$d = 2 \times d$ $D = 2 \times D$
El área del rombo pequeño es 27 **cm²**	$A = 27\ cm^2$
La diagonal menor del rombo pequeño corresponde al doble del valor del segundo número primo más pequeño. *El segundo número primo más pequeño es el 3.	$d = 2 \times 3$ $d = 6$

Como sabemos $d = 6$, podemos determinar la diagonal menor del rombo grande: $d = 2 \times d = 2 \times 6 = 12$, con lo que obtenemos que la diagonal menor del rombo grande es 12*cm*.

Como sabemos el área del rombo pequeño y su diagonal menor, podemos escribir la fórmula del área igualada a su valor, para intentar determinar los valores desconocidos.

Escribimos la fórmula del área del rombo:

$$A = \frac{D \times d}{2}$$



La igualamos al valor del área, que ya conocemos:

$$27\ cm^2 = \frac{D \times d}{2}$$

Si quisiéramos eliminar la división de la fórmula, podemos multiplicar por dos a ambos lados de la igualdad, obteniendo una igualdad de números enteros, sin división:

$$(27\ cm^2) \times 2 = \frac{(D \times d)}{2} \times 2$$

$$54\ cm = D \times d$$

Como sabemos que el valor de la diagonal menor es 6cm, lo sustituimos:

$$54\ cm = D \times 6\ cm$$

Por lo que para averiguar la diagonal mayor solo debemos encontrar un número que multiplicado por 6 de como resultado 54. O lo que es lo mismo dividir 54 por 6, para determinar dicho factor o dividir ambos miembros de la igualdad por seis:

$$\frac{54\ cm^2}{6\ cm} = \frac{D \times 6\ cm}{6\ cm}$$

$$9\ cm = D$$

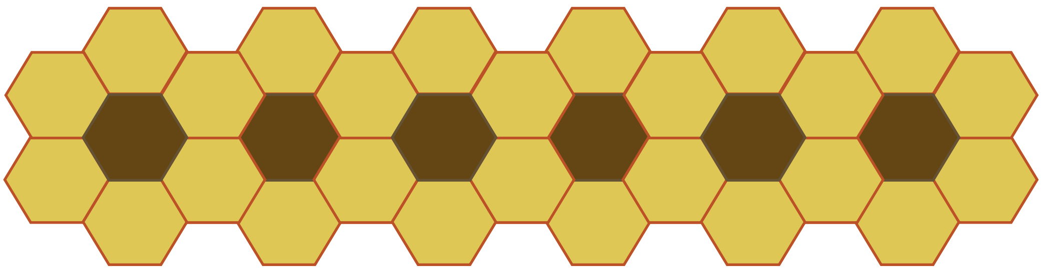
Ahora que ya conoces cual es la medida de la diagonal mayor del rombo más pequeño puedes usarla para calcular la medida de la diagonal mayor del rombo más grande.

Sabíamos que: $D = 2 \times D$

Entonces: $D = 2 \times 9 = 18$

Por lo que la medida de la diagonal mayor del rombo más grande es 18 cm.

25. Mónica está decorando la pared de su habitación con una serie de girasoles formados por hexágonos de dos colores. Dibuja los centros de los girasoles con un hexágono oscuro y los pétalos con hexágonos claros, como se observa en la figura.



Si continúa el patrón Mónica utiliza un total de 222 hexágonos claros, ¿cuántos girasoles dibujó en total?

Solución

Puedes resolver este problema analizando lo dibujado por Mónica hasta el momento: ella ha dibujado 6 girasoles, pero para construirlos primero dibujó un girasol y luego conforme fue dibujando el resto de los girasoles fue adicionando a la primera flor un hexágono de color café que representan el centro de la flor y cuatro hexágonos de color claro (pétalos), ya que las flores contiguas comparten 2 pétalos.

Puedes ver además que lleva dibujados 26 pétalos y utilizó en total 222, por lo que debes realizar primero la resta para saber cuántos hacían falta por dibujar: 222 – 26 = 196.

Como le falta utilizar 196 y vimos anteriormente que según el patrón se agrega un hexágono oscuro y cuatro claros por girasol, entonces debemos de dividir 196 en grupos de cuatro para encontrar la cantidad de girasoles que le faltan por dibujar:

$$\begin{array}{l} \underline{196} \div 4 = 49 \\ \;\;4 \end{array}$$

La falta dibujar 49 flores más, es decir, ya habían 6 dibujadas y se suman 49, entonces, 49 + 6 = 55. Mónica dibujó en total 55 girasoles.

Otra forma de resolver este problema es organizar los datos por medio de una tabla de valores. Se colocan los datos agregando la información de la cantidad de girasoles dibujados, la cantidad de hexágonos oscuros y la cantidad de hexágonos claros necesarios para cada cantidad de girasol dibujada.

Iniciando desde que Mónica dibuja el primer girasol, para buscar una relación entre la cantidad de girasoles y de hexágonos:

Girasoles	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**...**
Hexágonos oscuro	1	2	3	4	5	6	...
Hexágonos claros	6	6+4=10 10	10+4=14 14	14+4=18 18	18+4=22 22	22+4=26 26	...

Se observa que, después del primero que utiliza 6, se agregan cada vez 4 hexágonos claros más por cada girasol extra que se dibuja. Entonces si utiliza 222 hexágonos claros, le restamos los 6 del girasol inicial 222 - 6 = 216. Y la cantidad de hexágonos claros restantes los dividimos en grupos de 4 para determinar cuántos girasoles más podrá dibujar, (216 ÷ 4 = 54). Lo que quiere decir que dibuja en total 54 + 1 = 55 girasoles.

Otra forma de resolverlo es organizar los datos por medio de una tabla de valores. Se colocan los datos agregando la información de la cantidad de girasoles dibujados, la cantidad de hexágonos oscuros y la cantidad de hexágonos claros necesarios.

Iniciando desde que Mónica dibuja el primer girasol, para buscar una relación entre la cantidad de girasoles y de hexágonos, que permita establecer una fórmula general que relacione para cualquier cantidad de girasoles, la cantidad de hexágonos necesarios.

Girasoles	1	2	3	4	5	6	...	n
Hexágonos oscuro	1	2	3	4	5	6	...	n
Hexágonos claros	2+4x1 6	2+4x2 10	2+4x3 14	2+4x4 18	2+4x5 22	2+4x6 26	...	2+4xn

Se observa que, la cantidad de hexágonos oscuros siempre es igual a la cantidad de girasoles dibujados. Mientras que la cantidad de hexágonos claros está dada por el cuádruple del número de girasoles más dos, 2 + 4 x n, para n cualquier número de girasoles dibujados.

Entonces para la cantidad de girasoles en la que se utilizan 222 hexágonos claros, se tendría la siguiente relación: $222 = 2 + 4 \times n$

Donde n representa la cantidad de girasoles buscada en el problema. Para encontrar dicho valor en la igualdad anterior restamos 2 a ambos lados:

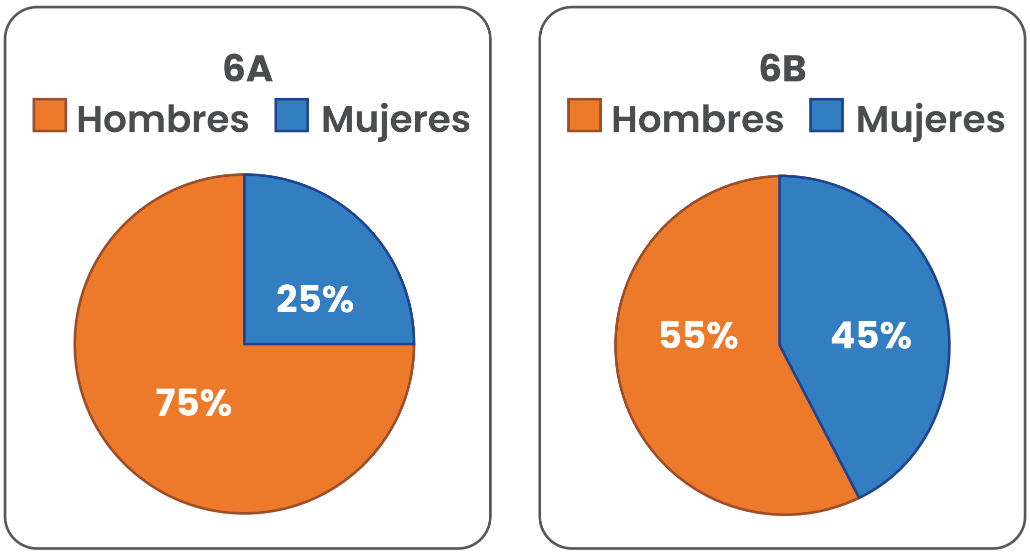
$$222 - 2 = 2 + 4 \times n - 2$$
$$220 = 4 \times n$$

Para determinar el valor de n dividimos por 4 ambos lados de la igualdad:

$$\frac{220}{4} = \frac{4 \times n}{4}$$
$$55 = n$$

Lo que quiere decir que dibuja en total 55 girasoles.

26. En la escuela de Tinkilandia hay el doble de estudiantes en la 6A que en la 6B, la cantidad de hombres y mujeres en cada sección está distribuida de la siguiente forma:



Si en total hay 41 mujeres en sexto, ¿cuántos hombres hay en sexto?

Solución

Para este problema te presentamos dos posibles estrategias, la primera opción es resolverla utilizando elementos de álgebra. Debes tomar en cuenta lo que dice sobre las características de los grupos: “hay el doble de estudiantes en la 6A que en la 6B”, a partir de esa frase puedes iniciar de la siguiente forma:

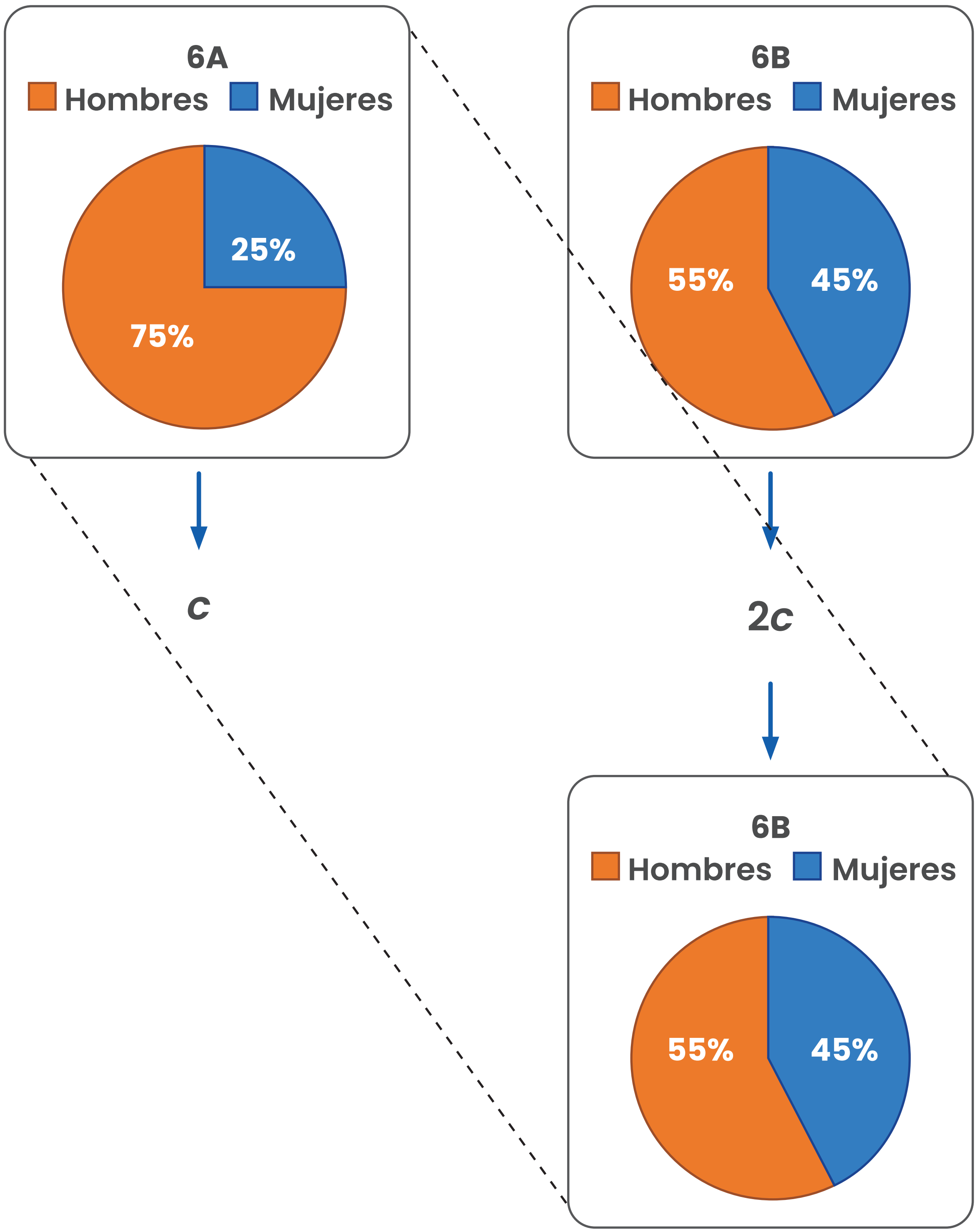
<table>
<tr><th>Sección 6A</th><th>Sección 6B</th></tr>
<tr><td colspan="2">“Hay el doble de estudiantes en la 6A que en la 6B”, representamos con C la población de la sección 6B y por ello 2C es la población de la 6A.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Como conocemos además que en total hay 41 mujeres, nos centraremos en trabajar con los porcentajes de las mujeres.</td></tr>
<tr><td>2C
Ahora buscamos el 75% de 2x
$\mathbf{\frac{75 \text{ x } 2c}{100} = \frac{75c}{50}}$
$\mathbf{\frac{15\,c}{10} = \frac{3\,c}{2}}$</td><td>C
Ahora buscamos el 55% de x
$\frac{55 \text{ x } c}{100}$
$\frac{11\,c}{20}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Utilizando que en total hay 41 mujeres, y que ese total debe salir de la suma de la cantidad de mujeres de ambos grupos.</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\mathbf{\frac{3\,c}{2} + \frac{11\,c}{20} = 41}$
Factorizamos los denominadores:
$\mathbf{\frac{3\,c}{2} + \frac{11\,x}{2 \times 2 \times 5} = 41}$
Homogeneizamos las fracciones para realizar la suma:
$\mathbf{\frac{3c \text{ x } 2 \text{ x } 5}{2 \text{ x } 2 \text{ x } 5} + \frac{11\,c}{2 \text{ x } 2 \text{ x } 5} = 41}$
$\mathbf{\frac{3c \text{ x } 2 \text{ x } 5 + 11c}{2 \text{ x } 2 \text{ x } 5} += 41 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 5}$
Una vez todos los denominadores son iguales:
$\mathbf{30c + 11c = 820}$
Sumamos los términos equivalentes:
$\mathbf{41c = 820}$
Dividimos ambos lados de la igualdad por 41:
$\mathbf{\frac{41c}{41} = \frac{820}{41}}$
$\mathbf{c = 20}$</td></tr>
</table>

Como ya encontraste que el valor de $c = 20$. Si en total hay $c+2c = 20+40=60$ estudiantes. Y de esos estudiantes 41 son mujeres, entonces el resto son hombres. $60-41= 19$. Por lo tanto hay 19 hombres en sexto.

Otra opción para resolver el problema es por medio de aritmética. Para ello tienes la información dada en el gráfico. Luego dice que la cantidad de personas de personas del grupo 6A es el doble del 6B, entonces para hacer que los dos grupos tengan la misma población hay que multiplicar por dos al grupo 6B.

Por las proporciones, si tienes dos grupos en donde las poblaciones están expresadas en porcentajes, si por ejemplo, tomamos el grupo que se necesita balancear con el otro grupo si lo duplicas o triplicas, entre otros, el porcentaje no cambia, dicho esto podemos desarrollar lo siguiente:

Tomamos como “C” la población de la sección 6A entonces para que los conjuntos sean iguales, multiplicamos la población del grupo 6B por 2 para obtener un balance, así:


6A
Hombres
Mujeres
25%
75%
6B
Hombres
Mujeres
55%
45%
c
2c
6B
Hombres
Mujeres
55%
45%

Las líneas punteadas sirven para que puedas identificar con cuales grupos vamos a trabajar, en términos de porcentajes debemos realizar lo siguiente:

Ahora lo divides porque anteriormente lo duplicaste.

El $75\% + \frac{55}{2}\%$ es igual a 41 mujeres

El $\frac{150\%}{2} + \frac{55\%}{2} = \frac{205\%}{2}$ es igual a $\frac{82}{2}$ mujeres

Homogeneizando

El 205% es igual a 82 mujeres

Del procedimiento anterior se concluye que el 205 % = 82, la población total es desconocida, por lo que la representaremos con C, luego aplicamos la regla de 3 colocando los datos como sigue:

Cantidad de personas	Porcentaje
C	100
82	205

$$\frac{c}{100} = \frac{82}{205} \Rightarrow c = \frac{82 \times 100}{205} = \frac{82\,00}{205} = 40$$

Como C = 40, entonces hay un total de 40 personas en el grupo. En el grupo 6A, pasa lo siguiente:

$$\text{Mujeres: } 40 \times 75\% = 30$$
$$\text{Hombres: } 40 \times 25\% = 10$$

Y en la sección 6B:

$$\text{Mujeres: } 40 \times \frac{55}{2}\% = 11$$
$$\text{Hombres: } 40 \times \frac{45}{2}\% = 9$$

En total hay (10+9=19)19 hombres en sexto.

27. Los alumnos de sexto están estudiando las potencias. Mía escribe tres cantidades en la pizarra y la profesora elije la que al expresarla en notación desarrollada tiene la mayor cantidad de ceros.

¿Cuántos ceros tiene la cantidad elegida por la profesora?

$3^4 \times 2^5 \times 5^6 \times 11$	$2^6 \times 3^7 \times 25 \times 7^3$	$3^7 \times 5^7 \times 13 \times 16$

Solución

Para este problema tienes dos posibles formas de resolverlo. La primera opción es desarrollar cada expresión escrita en cada celda mostrada en el problema, puedes hacerlo de la siguiente forma:

$3^4 = 81$	$2^6 = 32$	$5^6 = 15625$	11
$(81) \times (32) \times (15\,625) \times (11) = 445\,500\,000$			

$2^6 = 64$	$3^7 = 2187$	25	$7^3 = 343$
$(64) \times (2\,187) \times (25) \times (343) = 1\,200\,225\,600$			

$3^7 = 2187$	$5^7 = 78125$	13	16
$(2\,187) \times (78\,125) \times (13) \times (16) = 35\,538\,750\,000$			

Por lo que la expresión que escogió la profesora tiene 5 ceros, la primera celda del enunciado del problema.

La segunda opción para resolver el problemas es expresar cada expresión como multiplicación de factores y luego formar las potencias de 10 para analizar cual tiene mayor cantidad de potencias de diez y por tanto más ceros de la siguiente forma:

3^4	2^5	5^6	11
3^4	$2^5 \times 5^5$	5^1	11
3^4	10^5	5^1	11
10^5 implica que termina con cinco ceros			

2^6	3^7	25	7^3
2^6	3^7	5^2	7^3
2^4	3^7	$2^5 \times 5^2$	7^3
2^4	3^7	10^2	7^3
10^2 implica que termina con dos ceros			

3^7	5^7	13	16
3^7	5^7	13	2^4
3^7	5^3	13	$2^4 \times 5^4$
3^7	5^3	13	10^4
10^2 implica que termina con cuatro ceros			

Por lo que la expresión que escogió la profesora tiene 5 ceros, la primera celda del enunciado del problema.

28. Rita y Karla quieren saber, en años caninos, cuál es la edad aproximada de su perrito "Capitán" a partir de su edad en años humanos. Buscan en internet una fórmula para calcularla y encuentran dos distintas que se muestran en las siguientes imágenes.

RITA
El primer año humano del perro quivale a 31 años caninos. Luego cada vez que se duplica la edad del perro, su edad canina aumenta en 11.

KARLA
Cada uno de los dos primeros años humanos del perro corresponden a 12 años caninos, todos los años humanos posteriores corresponden a 4 años caninos.

a. Según la fórmula de Rita, ¿cuál es la edad en años caninos de Capitán a los 8 años humanos?

b. ¿A partir de qué edad humana de Capitán, la fórmula de Karla hace que la edad canina sea mayor que la fórmula de Rita?

Solución
Para la primera parte del problema, debe resolverse utilizando la fórmula de Rita de la siguiente forma, coloco el primer año de edad humana del perro que equivale 31 años caninos. A partir de ahí se indica que cada vez que se duplica la edad humana (es decir a los 2, 4, 8, …) se debe aumentar en 11 la edad canina, como sigue:

Años humanos	Fórmula de Rita
1	31
2	31+11 = 42
4	42+11 = 53
8	53+11 = 64

Por lo que la edad canina de Capitán a los 8 años humanos es de 64 años.

La segunda pregunta se puede resolver por medio de una tabla donde se comparen los valores obtenidos en cada fórmula para determinar cuándo una fórmula brinda un valor mayor o menor que la otra.

Una opción para resolverla es basada en la fórmula de Rita, calculando los duplos de años humanos, como sigue:

Años humanos	Fórmula de Rita		Fórmula de Karla
1	31	>	12
2	31+11 = 42	>	12+12 = 24
4	42+11 = 53	>	24+4+4 = 32
8	53+11 = 64	>	32+4+4+4+4 = 48
16	54+11 = 75	<	48+4+4+4+4+4+4+4+4 = 80

Determinando que a partir de los 16 años humanos de Capitán, la fórmula de Karla hace que la edad canina sea mayor que la fórmula de Rita.

Otra opción para resolver esta segunda pregunta es haciendo una tabla donde que compare los valores obtenidos en cada fórmula para determinar cuándo una fórmula brinda un valor mayor o menor que la otra, dando los saltos de año en año, basados en la fórmula de Karla, como sigue:

Años humanos	Fórmula de Rita		Fórmula de Karla
1	31	>	12
2	31+11 = 42	>	12+12 = 24
3			24+4 = 28
4	42+11 = 53	>	28+4 = 32
5			32+4 = 36
6			36+4 = 40
7			40+4 = 44
8	53+11 = 64	>	44+4 = 48
9			44+4 = 52
10			52+4 = 56
11			56+4 = 60
12			60+4 = 64
13			64+4 = 68
14			68+4 = 72
15			72+4 = 76
16	54+11 = 65	<	76+4 = 80

Determinando que a partir de los 16 años humanos de Capitán, la fórmula de Karla hace que la edad canina sea mayor que la fórmula de Rita.

29. Gina tiene tarjetas numeradas del 1 al 20 colocadas en desorden sobre la mesa y un dado de 20 caras. Ella lanza el dado y luego elimina de la mesa las parejas de tarjetas cuya suma es igual al número obtenido en el dado.

- ¿Cuál es el número obtenido en el dado si quedan en la mesa 14 cartas?
- ¿Cuál es el número obtenido en el dado si solo quedan en la mesa 2 cartas?
- ¿Es posible que solo quede una carta? ¿o ninguna? ¿cómo?

Solución

Se puede realizar una representación de las 20 cartas que están sobre la mesa.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Gina lanza un dado de 20 caras y elimina de la mesa las parejas de tarjetas cuya suma es igual al número obtenido en el dado.

Si luego de lanzar el dado quedan 14 cartas en la mesa quiere decir que se eliminaron únicamente seis con el primer lanzamiento del dado.

Es decir, tres parejas, por lo que debemos pensar en un número que únicamente se pueda descomponer en sumas de tres formas diferentes.

En este caso el número 8 solamente puede descomponerse como:

$$7 + 1, \qquad 6 + 2, \qquad 5 + 3.$$

Eliminando tres parejas, para un total de seis cartas.

Por su lado el número 7 también puede descomponerse únicamente como:

$$6 + 1, \qquad 5 + 2, \qquad 4 + 3.$$

Cumpliendo también lo solicitado. **Por lo que la respuesta a la primera interrogante es que en el primer lanzamiento puede haberse obtenido en el dado un 7 o un 8.**

Respecto al segundo caso, me indican que si en la mesa solo quedan dos cartas, cuál sería el número obtenido en el dado.

Si solo quedan dos cartas en la mesa eso quiere decir que se han eliminado 18 cartas, un total de 9 parejas. Por lo que debemos pensar en un número que pueda descomponerse por medio de sumas de enteros de 9 formas distintas.

En ese caso tenemos al 19 que puede escribirse como:

$$10+9, \quad 11+8, \quad 12+7, \quad 13+6, \quad 14+5, \quad 15+4, \quad 16+3, \quad 17+2, \quad 18+1.$$

También tenemos el 20, que puede escribirse como:

$$11+9, \quad 12+8, \quad 13+7, \quad 14+6, \quad 15+5, \quad 16+4, \quad 17+3, \quad 18+2, \quad 19+1.$$

Por lo que si en la mesa quedan 2 cartas puede haberse obtenido en el dado un 19 o un 20.

Respecto a la última pregunta. Para que solo quede una carta en la mesa deberían eliminarse 19 cartas, lo cual no es posible porque no hay una cantidad de parejas que sea equivalente a 19 cartas. Lo más cercano serían 9 parejas que equivale a eliminar 18 cartas, quedando dos en la mesa.

Por lo que no es posible que quede solo una carta sobre la mesa a menos que salga el 21 en el dado lo cual no es posible o que las cartas estén numeradas del 0 al 20 y salga el 20 en el dado, con lo que se eliminarían todas las parejas y solamente quedaría la carta con el 10.

Otra forma de resolver este problema es empezando con una tabla donde se establezcan todas las posibles sumas entre las combinaciones de las cartas, eliminando aquellas que no son posibles o son repetidas:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**
2	3	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
3	4	5	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
4	5	6	7	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
5	6	7	8	9	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
6	7	8	9	10	11	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
7	8	9	10	11	12	13	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
8	9	10	11	12	13	14	15	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
9	10	11	12	13	14	15	16	17	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	X	X	X	X	X	X	X	X	X
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	X	X	X	X	X	X	X	X
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	X	X	X	X	X	X	X
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	X	X	X	X	X	X
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	X	X	X	X	X
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	X	X	X	X
17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	X	X	X
18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	20	31	32	33	34	35	X	X
19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	21	32	33	34	35	36	37	X
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	22	33	34	35	36	37	38	39

En dicha tabla se observa que el **7 y el 8 son los números** que se pueden obtener de tres sumas distintas, lo cual eliminaría seis cartas, dejando 14 sobre la mesa. También lo hacen el 34 y el 35, pero el dado solo tiene 20 caras por lo que esos no se consideran.

Luego se observa que el **19 y el 20 son los números** que se pueden obtener de 9 sumas distintas, lo cual eliminaría 18 cartas, dejando 2 sobre la mesa. También lo hacen el 22 y el 23, pero el dado solo tiene 20 caras por lo que esos no se consideran.

Para que quede en la mesa solo una carta deberían eliminarse 19 cartas, lo cual no es posible con ninguna cantidad de parejas, al ser impar. Por lo que la única opción sería agregar una carta más, por ejemplo el cero, para eliminar 10 parejas y que quede una carta. Para que no quede ninguna carta deberían eliminarse 10 parejas, lo cual sucede con el 21, pero no está en el dado.

30. La maestra de prescolar coloca en el salón de clase una caja de toallitas húmedas para que al ingresar al aula los alumnos desinfecten sus manos.

Se sabe que:

- Cada día, cada estudiante usa una toallita y nunca falta ningún alumno a clases.
- El primer día usaron la novena parte de las toallas, más una.
- El segundo día usaron la novena parte de las toallas restantes, más dos.
- El tercer día usaron la novena parte de las toallas restantes, más tres.
- Esto se repitió hasta que se gastaron todas las toallitas.

¿ Cuál es la mínima cantidad de toallitas que traía la caja?

Solución

Para dar respuesta a este problema se puede abordar de la siguiente forma, considerando que cada día se usan la misma cantidad de toallitas, tantas como estudiantes hay en el aula. Se representa con "carita feliz" el número de alumnos en la clase y con "papelito señalado con 9n" el número inicial de toallitas.

El primer día ese número de alumnos se representa como el número inicial de toallitas, que ya es múltiplo de nueve, entre nueve más uno.

☺ $= \frac{\boxed{9n}}{9} + 1$

Para que ese número sea múltiplo de nueve y así la diferencia entre el número de toallitas inicial que era múltiplo de nueve y un múltiplo de nueve me resulte en otro múltiplo de nueve, tendría que suceder que el número de toallitas inicial entre nueve sea mínimo ocho para que al sumarle uno me de nueve. Esto implica que ese número inicial de toallitas es mínimo 9 x 8 = 72.

Así $\frac{72}{9} + 1 = 8 + 1 = 9$, de esa forma $72 - 9 = 63$ sería nuevamente divisible por nueve.

Por lo que la caja traería mínimo 72 toallitas.

Otra estrategia para resolver el problema es que los estudiantes realicen un proceso de prueba y error para determinar valores que satisfagan dichas condiciones. Como la cantidad de toallitas de la caja debe ser divisible por nueve, pero las restantes del primer día también, y las restantes del segundo día también. Entonces tiene la pista de iniciar a probar con múltiplos de nueve, pero como debe ser divisible para al menos tres días se descarta de inicio valores pequeños como 9 o 18, iniciando la tabla en 27:

Toallas caja	Al finalizar el día 1	Al finalizar el día 2	Al finalizar el día 3	Al finalizar el día 4	...	...
27	$27-\left(\frac{27}{9}+1\right)$ 23	$23-\left(\frac{23}{9}+2\right)$ No se puede				
36	$36-\left(\frac{36}{9}+1\right)$ 31	$31-\left(\frac{31}{9}+2\right)$ No se puede				
45	$45-\left(\frac{45}{9}+1\right)$ 39	$39-\left(\frac{39}{9}+2\right)$ No se puede				
54	$54-\left(\frac{54}{9}+1\right)$ 47	$47-\left(\frac{47}{9}+2\right)$ No se puede				
63	$63-\left(\frac{63}{9}+1\right)$ 55	$55-\left(\frac{55}{9}+2\right)$ No se puede				
72	$72-\left(\frac{72}{9}+1\right)$ 63	$63-\left(\frac{63}{9}+2\right)$ 54	$54-\left(\frac{54}{9}+3\right)$ 45	$45-\left(\frac{45}{9}+4\right)$ 36	$36-\left(\frac{36}{9}+5\right)$ 27	$27-\left(\frac{27}{9}+6\right)$ 18

Para el 72 se determina que si es posible, que la caja tenga 72 toallas inicialmente, se podría continuar el cálculo por dos días más:

$$18-\left(\frac{18}{9}+7\right)=9 \qquad 9-\left(\frac{9}{9}+8\right)=0$$

Siendo así que al finalizar el primer día quedarán 63, al fin del segundo día 54, al fin del tercer día 45, al fin del cuarto día 36, al fin del quinto día 27, al fin del sexto día 18, al fin del sexto día 9 y al fin del séptimo día 0. Alcanzando las toallas para siete días y siendo en el aula un total de 9 estudiantes.

31. Para organizar las personas en los vagones de un trencito, el operador hace grupitos de igual tamaño y asigna a cada grupito un vagón. En tres viajes del trencito en los cuales abordan 24, 36 y 18 personas, respectivamente, Pablo observa lo siguiente:

- En el primer y segundo viaje, los vagones A y B llevaban la misma cantidad de personas.
- En el segundo y tercer viaje, los vagones C y D llevaban la misma cantidad de personas.
- En los tres viajes los vagones B y C llevaban la misma cantidad de personas.

¿Cuántas personas llevaba el vagón A en el tercer viaje?
Justifique su respuesta.

Solución

El operador del tren hace grupitos de igual tamaño, es decir grupos de 2, o de 3, o de 4, etc. Pero todos de igual tamaño, tantos grupos como la cantidad de pasajeros le permita. Cada grupo es asignado a un vagón, por lo que no pueden sobrar grupos, pero no dice que no puedan faltar, es decir, puede en alguna ocasión ir algún o algunos vagones vacíos.

En tres viajes abordaron 24, 36 y 18 personas respectivamente. Como se dice que hace grupos eliminaremos la posibilidad de poner todos los pasajeros en un solo vagón, por lo que los agrupamientos posibles son los siguientes:

Viaje	1ro	2do	3er
Pasajeros	24	36	18
divisores	1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24	1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36	1, 2, 3, 6, 9, 18
agrupamientos posibles	24 grupos de 1	36 grupos 1	18 grupos de 1
	12 grupos de 2	18 grupos de 2	9 grupos de 2
	8 grupos de 3	12 grupos de 3	6 grupos de 3
	6 grupos de 4	9 grupos de 4	
	4 grupos de 6	6 grupos de 6	3 grupos de 6
	3 grupos de 8	--------	--------
	--------	4 grupos de 9	2 grupos de 9
	2 grupos de 12	3 grupos de 12	--------
	--------	2 grupos de 18	--------

Como se habla de cuatro vagones del tren, vamos a considerar todas las posibles formas de distribuir los pasajeros en esos vagones:

Primer viaje

	A	B	C	D
1er. viaje	6	6	6	6
	8	8	8	0
	~~0~~	~~8~~	~~8~~	~~8~~
	~~8~~	~~0~~	~~8~~	~~8~~
	8	8	0	8
	~~12~~	~~12~~	~~0~~	~~0~~
	~~12~~	~~0~~	~~12~~	~~0~~
	~~0~~	~~12~~	~~0~~	~~12~~
	~~12~~	~~0~~	~~0~~	~~12~~
	~~0~~	~~12~~	~~12~~	~~0~~
	~~0~~	~~0~~	~~12~~	~~12~~

Por la primera condición "en el primer y segundo viaje, los vagones A y B llevaban la misma cantidad de personas", se eliminan las posibilidades tachadas con rojo ya que A y B llevan diferente cantidad.

Por la tercera "en los tres viajes los vagones B y C llevaban la misma cantidad de personas" se eliminan las posibilidades tachadas con azul ya que B y C llevan diferente cantidad.

Entonces, en el primer viaje, si viajaron personas en todos los vagones, ha viajado 6 personas en cada vagón, u 8 personas en los vagones A,B y C dejando el último vagón vacío.

Segundo viaje

	A	B	C	D
2do. viaje	9	9	9	9
	~~12~~	~~12~~	~~12~~	~~0~~
	~~12~~	~~0~~	~~12~~	~~12~~
	~~0~~	~~12~~	~~12~~	~~12~~
	~~12~~	~~12~~	~~0~~	~~12~~
	~~18~~	~~0~~	~~18~~	~~0~~
	~~0~~	~~18~~	~~18~~	~~0~~
	~~0~~	~~0~~	~~18~~	~~18~~
	~~18~~	~~18~~	~~0~~	~~0~~
	~~18~~	~~0~~	~~0~~	~~18~~
	~~0~~	~~18~~	~~0~~	~~18~~

Por la primera condición, se eliminan las posibilidades tachadas con rojo ya que A y B llevan diferente cantidad.

Por la segunda "en el segundo y tercer viaje, los vagones C y D llevaban la misma cantidad de personas", se eliminan las posibilidades tachadas con verde.

Por la tercera condición, se eliminan las posibilidades tachadas con azul, pues B y C llevan diferente cantidad.

Por lo que, en el segundo viaje viajaron personas en todos los vagones y la cantidad es 9 personas en cada vagón.

Tercer viaje

Por la segunda condición, se eliminan las posibilidades tachadas con verde, pues D y C llevan diferente cantidad.

	A	B	C	D
3er. viaje	~~6~~	~~6~~	~~6~~	~~0~~
	~~6~~	~~6~~	~~0~~	~~6~~
	~~6~~	~~0~~	~~6~~	~~6~~
	0	6	6	6
	~~9~~	~~9~~	~~0~~	~~0~~
	~~9~~	~~0~~	~~9~~	~~0~~
	~~0~~	~~9~~	~~9~~	~~0~~
	~~9~~	~~0~~	~~0~~	~~9~~
	~~0~~	~~0~~	~~9~~	~~9~~
	~~0~~	~~9~~	~~0~~	~~9~~

Por la tercera condición “en los tres viajes los vagones B y C llevaban la misma cantidad de personas” se eliminan las posibilidades tachadas con azul.

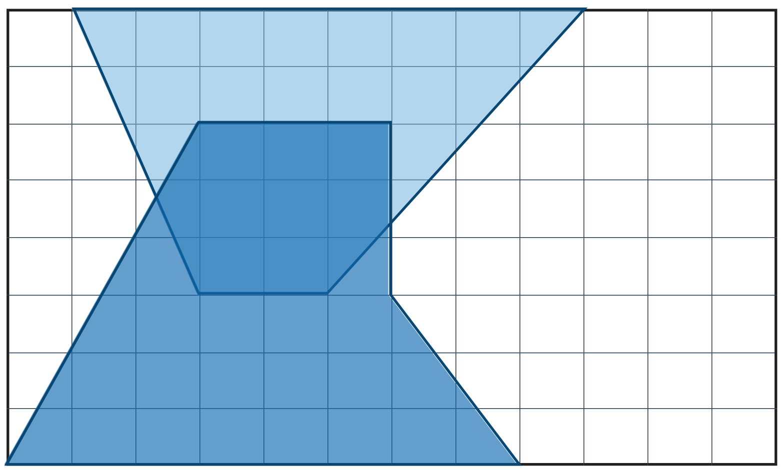
Así que en el tercer viaje el vagón A llevaba cero personas, y 6 personas viajaron en cada uno de los vagones restantes

Entonces, las únicas opciones que satisfacen todas las condiciones dadas son:

	A	B	C	D
1er. viaje	6	6	6	6
	8	8	8	0
2do. viaje	9	9	9	9
3er. viaje	**0**	**6**	**6**	**6**

32. Pedro observa la siguiente obra de arte formada con cuadritos de cerámica de lado 1*dam*. Si el área azul oscuro del centro es de 9,38 *dam*^{2}.

¿Cuál es, en decámetros cuadrados, el área de la superficie blanca?



Solución

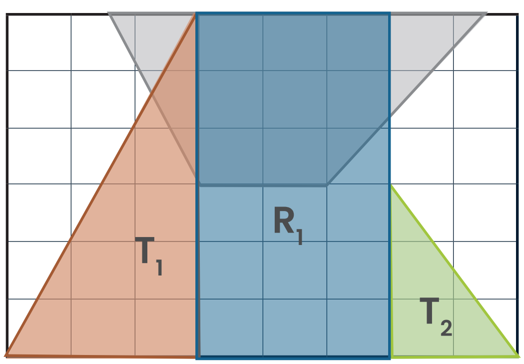
Se sabe que la obra está formada con cuadritos de cerámica de 1dam, si contamos la cantidad de cuadritos en total que conforman la obra es de 12 x 8 = 96. Por lo que el área total de la obra de arte es un rectángulo de 96 *dam*^{2}.

Vamos ahora a analizar cada una de las tres figuras que conforman la obra de arte, la primera figura azul claro formada con la base inferior del rectángulo la llamaremos figura 1, a la segunda figura azul claro formada con la base superior del rectángulo la llamaremos figura 2 y a la figura azul oscuro del centro la llamaremos figura 3.

Además, tomamos en cuenta que la medida de la base y la altura de los triángulos y rectángulos que conforman esas figuras, se determinan contando la cantidad de cuadritos que las conforman.

- **Figura 1:**

La figura gris claro formada con la base inferior del rectángulo, está compuesta por un rectángulo y dos triángulos rectángulos, por lo que su área puede calcularse mediante la suma de esas tres figuras, como sigue:



$$A_{f1}=A_{T1}+A_{R1}+A_{T2}$$

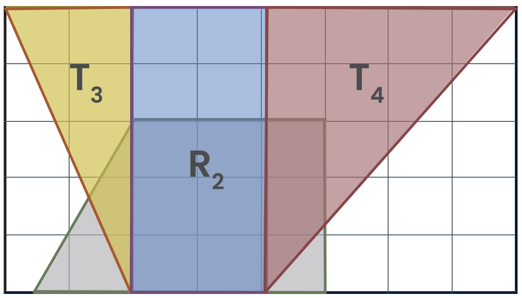
$$A_{f1} = \frac{3 \times 6}{2} + 3 \times 6 + \frac{2 \times 3}{2}$$

$$A_{f1} = 9 + 18 + 3$$

$$A_{f1} = 30\ dam^2$$

• **Figura 2:**

La figura gris claro formada con la base superior del rectángulo, está compuesta por un rectángulo y dos triángulos rectángulos, por lo que su área puede calcularse mediante la suma de esas tres figuras, como sigue:



$$A_{f2} = A_{T3} + A_{R2} + A_{T4}$$

$$A_{f2} = \frac{2 \times 5}{2} + 2 \times 5 + \frac{4 \times 5}{2}$$

$$A_{f2} = 5 + 10 + 10$$

$$A_{f2} = 25 \; dam^2$$

• **Figura 3:**

La figura gris oscura del centro, formada por un hexágono irregular tiene un área de 9,38 dam^2

Para calcular el área de la superficie blanca es necesario al área total de la obra de arte quitarle las dos áreas gris clara, pero al eliminar esas grises estaríamos eliminando dos veces la parte gris oscura que pertenece a ambas figuras gris claro. Por lo que debemos luego sumarla una vez, ya que la estaríamos eliminando doble.

Así, el área blanca se obtiene de la siguiente forma:

$$A_{Blanca} = A_{Total} - A_{figura1} - A_{figura2} + A_{figura3}$$

$$A_B = 96 - 30 - 25 + 9{,}38$$

$$A_B = 50{,}38 \; dam^2$$

Por lo que el área de la superficie blanca es de 50, 38 decámetros cuadrados.

Créditos

Los ítems fueron tomados de las pruebas aplicadas en las diferentes etapas de la OLCOMEP 2022

Autores de los ítems

Mónica Mora Badilla, profesora de Matemática.
Profesora de Matemática, Escuela de Ciencias de la Educación, Cátedra Didáctica de la Matemática, Universidad Estatal a Distancia.

Hermes Mena Picado, asesor nacional de Matemática.
Departamento de Primero y Segundo Ciclos, Ministerio de Educación Pública.

Compilación y estrategias de solución de los cuadernillos realizadas por:

Mónica Mora Badilla, profesora de Matemática.
Profesora de Matemática, Escuela de Ciencias de la Educación, Cátedra Didáctica de la Matemática, Universidad Estatal a Distancia.

Revisor del cuadernillo

Yeri Charpentier Díaz, asesora nacional de Matemática.
Departamento de Primero y Segundo Ciclos, Ministerio de Educación Pública.

Diseño Gráfico

Karla Guevara Murillo
Dirección de Recursos Tecnológicos en Educación, MEP.

Ministerio de Educación Pública

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

UNED

TEC Tecnológico de Costa Rica

OLCOMEP